**Matritsalar. Matritsalar ustida amallar. Matritsa tushunchasi. Matritsalarni qoʻshish, ayirish, oʻzgarmas songa koʻpaytirish hamda matritsani matritsaga koʻpaytirish**

**Reja:**

1. Matritsalar. Matritsa tushunchasi.
2. Kvadrat matritsa. Xos va xosmas (maxsusmas) matritsa .
3. Transponirlangan matritsa.
4. Matritsalar ustida amallar.
5. Matritsa rangi va uni hisoblash.

 Algebra – matematikaning boʻlimi boʻlib, faqat sonlar ustida qoʻshish, ayrish, koʻpaytirish, boʻlish amallari boʻlib qolmay, balki boshqa matematik ob’ektlar, masalan koʻphadlar, vektorlar, matritsalar, operatorlarlarda ham qoʻllaniladi.

 Matritsa – jadvaldir. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi va ularning yechimlari matritsalar orqali, ayniqsa hozirgi vaqtda elektrotexnika, radiotexnika, avtomatikaga doir koʻpgina kitoblarda tenglamalar sistemasi va differensial tenglamalar sistemalarining yechimlari matritsalar nazariyasidan foydalanib tekshiriladi.

**Matritsa tushunchasi**

 Matritsa sonlardan tuzilgan toʻg‘ri burchakli jadval. Koʻpincha ma’lumotlarni toʻg‘ri burchakli jadval koʻrinishda joylashtirishga toʻg‘ri keladi. Masalan, agar uchta zavod beshta har xil turdagi maxsulot chiqarayotgan boʻlsa, u holda yillik ishlab chiqarish xaqidagi hisobot ushbu



jadval koʻrinishida berilishi mumkin, bu yerda  bilan *i*- zavod tomonidan yil davomida ishlab chiqarilgan *j*-turdagi mahsulot miqdori belgilanadi, qisqacha . Agar kelgusi yil davomida maxsulot assortimenti oʻzgargan boʻlsa, u holda ikkinchi yil uchun ishlab chiqarish hisoboti ham  matritsa koʻrinishida boʻladi. Unda ikki yillik mahsulot chiqarish  matritsa bilan ifodalanadi [2,3].

 Mahsulot chiqarishni donalarda, metrlarda, tonnalarda, soʻmlarda va h.k. ifodalab matritsalar tuzish mumkin.

 *m* ta satrli va *n* ta ustunli toʻg‘ri toʻrtburchak shaklida berilgan ta sonlardan tuzilgan ushbu ifoda



oʻlchovli matritsa deb ataladi. Matritsani tashkil qilgan sonlar uning elementlari deyiladi va *aij* deb belgilanadi, bunda .

 Matritsalar lotin alfavitidagi bosh harflar bilan belgilanadi, ba’zida koʻrinishlarda ham belgilanadi. *n=1* boʻlganda ustun matritsa deb ataladi. *m=1* boʻlganda yoʻl (satr) matritsa deb ataluvchi  matritsaga ega boʻlamiz.

**Kvadrat matritsa**

 *m=n* boʻlganda hosil boʻlgan matritsa *kvadrat* matritsa deyiladi:



 **Xos va xosmas matritsa**

Kvadrat matritsaning elementlaridan tuzilgan determinantni yoki *ΔA* deb belgilanadi. Agar  boʻlsa, u holda *A* matritsa xos yoki maxsus matritsa, boʻlsa xosmas yoki maxsusmas matritsa deyiladi. Kvadrat matritsani  elementlari joylashgan diagonali bosh diagonal,  diagonali esa yordamchi diagonal deyiladi.

 Bosh diagonali elementlari 1 dan, qolgan elementlari nollardan tuzilgan matritsani *birlik* matritsa deyiladi va *E* bilan belgilanadi:



 Barcha elementlari nollardan iborat matritsani nol matritsa deyiladi va *Q* bilan belgilanadi:



**Transponirlangan matritsa**

matritsa satr elementlarini va ularga mos ustun elementlarining oʻrinlarini almashtirib yozsak, transponirlangan  matritsa hosil boʻladi [2,6]. Misol uchun







Bu tushuncha uchun quyidagi xossalar oʻrinli:

**Matritsalar ustida amallar**

**Matritsalarni qoʻshish va ayirish**

Ikkita bir xil oʻlchovli matritsalarning mos elementlari yig‘indilari (ayirmalari)dan tuzilgan uchinchi matritsani berilgan matritsalarning yig‘indisi (ayirmasi) deyiladi:

,

 Misol  A+B=?

 j; 

**Matritsani songa koʻpaytirish**

 *A* matritsa bilan λ sonning koʻpaytmasi λ*A* deb *A* matritsaning har bir elementini λ soniga koʻpaytirish natijasida hosil boʻlgan matritsaga aytiladi.

Misol.



 Matritsalarni qoʻshish va songa koʻpaytirishning ushbu xossalari toʻg‘riligini tekshirish uncha qiyinchilik tug‘dirmaydi:

 1)  4) 

2) 5) 

 3)  6) 

 Bunda *A, B, S –* matritsalar,  - sonlar ,*Q* – nol matritsa.

Misol.



 Bunda *A, B, C –* matritsalar, *Q* – nol matritsa, *E-*birlik matritsa, λ- ixtiyoriy son.



**Nаzоrаt uchun sаvоllаr**

1. Mаtritsа dеb nimаgа аytilаdi?
2. Mаtritsаning sаtri vа ustuni dеgаndа nimаni tushunаsiz?
3. Mаtritsаning tаrtibi dеgаndа nimаni tushunаsiz?
4. Kvаdrаt mаtritsа dеb nimаgа аytilаdi?
5. Sоnni mаtritsаgа koʻpаytirish dеgаndа nimаni tushunаsiz?
6. 0 – Nоl mаtritsа. Е – birlik mаtritsа dеgаndа nimаni tushunаsiz?
7. Diаgоnаl mаtritsа dеgаndа nimаni tushunаsiz?
8. Mаtritsаlаrni qаndаy shаrt bаjаrilgаndа koʻpаytirish mumkin?

  *AB* va *BA* ni toping.

 **Ikkinchi, uchinchi tartibli determinantlar va ularning xossalari. Laplas teoremasi. Teskari matrisa. Ikkinchi tartibli determinant. Uchinchi tartibli determinant. Determinantning xossalari. Minor va algebraik to’ldiruvchilar. Laplas teoremasi. Teskari matritsa**

**Reja:**

1. Ikkinchi tartibli determinant.
2. Uchinchi tartibli determinant.
3. Determinantning xossalari.
4. Minor va algebraik tо‘ldiruvchilar.
5. Algebraik toʻldiruvchilar
6. Laplas teoremasi.
7. Teskari Matritsa.

**Ikkinchi tartibli determinant**

 Toʻrtta sondan iborat ushbu jadvalni qaraymiz va uni matritsa, aniqrog‘i ikkinchi tartibli kvadrat matritsa deb ataymiz:

 (1)

  son (1) matritsaning determinanti yoki ikkinchi tartibli determinant deb ataladi. (1) – matritsa determinanti

 (2)

kabi belgilanadi.

 Shunday qilib determinant uchun quyidagiga egamiz

 (3)

 Matritsa bilan determinantni almashtirmaslik lozim. Matritsa sonlardan iborat jadval, determinant esa shu jadvaldan (3) da koʻrsatilgan kabi hosil qilingan birgina sondir.

1. 
2. 

**Uchinchi tartibli determinant.**

 Uchinchi tartibli kvadrat matritsani, ya’ni 9 ta sondan iborat ushbu jadvalni qaraymiz:

 (4)

 Bu matritsaning uchinchi tartibli determinanti deb quyidagi  songa aytiladi va quyidagicha belgilanadi:



Shunday qilib,

 (5)

3-chi tartibli determinantni hisoblash usullari:

1. Uchburchak usuli. Uchburchak usulida hisoblash sxemasi:

   (6)

(+) ishora bilan (-) ishora bilan

 3-misol.



**Determinantning xossalari.**

 Determinantda mos satr va ustun elementlari oʻrnini almashtirishga uni transponirlash deyiladi.

 **1-xossa.** Transponirlash natijasida determinantning qiymati oʻzgarmaydi.

 (9)

 **2-xossa.** Determinantda istalgan ikki satr yoki ikki ustunning oʻrnini almashtirsak, uning qiymati oʻz ishorasini oʻzgartiradi, ammo absolyut qiymat oʻzgarmaydi.

 (10)

 **1-natija.** Ikkita satri yoki ustuni bir xil boʻlgan (yoki proporsional) determinantning qiymati nolga teng.

 **3-xossa.** Determinantning satri yoki ustunidagi elementlar umumiy λ koʻpaytuvchiga ega boʻlsa, λ ni determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

 **2-natija.** Determinantning biror satri ustuni boshqa satri yoki ustuniga parallel boʻlsa bunday determinantning qiymati nolga teng.

 **4-xossa.** Agar determinantning biror qatorining har bir elementi ikki qoʻshiluvchining yig‘indisidan iborat boʻlsa, u holda bu determinant ikki determinant yig‘indisidan

(11)

iborat boʻladi.

 **5-xossa.** Agar biror qator elementlariga boshqa parallel qatorning elementlari istalgan koʻpaytuvchiga koʻpaytirib qoʻshilsa, determinant oʻzgarmaydi [10].

 (12)

**Algebraik toʻldiruvchilar va minorlar**

 **1-ta’rif.** Determinant berilgan elementining minori deb, shu element turgan satr va ustunni bir vaqtda oʻchirishdan hosil boʻlgan determinantga aytiladi.

 Masalan, ushbu determinant *a12* turgan satr va ustunni oʻchirish natijasida hosil boʻlgan  2-tartibli determinant *a12* elementning minoridan iborat boʻladi va *M12* deb beriladi:

(13)

 Shunday qilib yuqorida tuzilgan uchinchi tartibli Δ determinantning har bir elementiga mos minori  boʻlib, ular ikkinchi tartibli va hammasi 9 ta boʻladi.

 **Ta’rif.** Determinant biror elementning algebraik toʻldiruvchisi deb uning bu determinantda juft yoki toq joy egallaganiga bog‘liq ravishda musbat yoki manfiy ishora bilan olingan minoriga aytiladi:[[1]](#footnote-1)

(14)

 Masalan, *a22* elementning algebraik toʻldiruvchisi

 son boʻladi, chunki *a22* juft joyda turibdi, *a32* element algebraik toʻldiruvchisi  son boʻladi, chunki *a32* toq oʻrinda turibdi.

**Laplas teoremasi**.

Teorema (Laplas teoremasi). Determinant qiymati uning biror satri (yoki ustun) elementlarini bu elementlarning mos algebraik toʻldiruvchilariga koʻpaytirilgan yig‘indisiga teng.

Isbot. (5) determinantning ikkinchi ustuni uchun teoremaning tasdig‘i quyidagicha  (15) tenglikning toʻg‘riligidan iborat, ya’ni



 4-misol. a) 



b) 



**Teskari matritsa.**

*A* matritsa bilan koʻpaytmasi birlik matritsadan iborat boʻlgan matritsani *A* matritsaga teskari matritsa deyiladi va *A-1* deb belgilanadi, demak



 Har qanday xosmas, ya'ni  boʻlsa, matritsaga teskari matritsa mavjud boʻlib, uning koʻrinishi quyidagicha boʻlishini koʻrsatish mumkin:



 Bunda, *Aij* – algebraik toʻldiruvchilar. Bu tasdiqning toʻg‘riligini bevosita  tenglik oʻrinli ekanligini koʻrsatish orqali isbotlash mumkin. Teskari matritsani ushbu xossalarini mavjudligini aytib oʻtamiz:

 1.  2.  3. 

**Nаzоrаt uchun sаvоllаr**

1. Ikkinchi tartibli determinant qanday hisoblanadi?
2. Uchinchi tartibli determinant qanday hisoblanadi?
3. Determinantning xossalarini ayting.
1. Claudio Canute, Anita Tabacco. Mathematical Analysis I,II.Springer-Verlag Italia, Milan 2015 [↑](#footnote-ref-1)