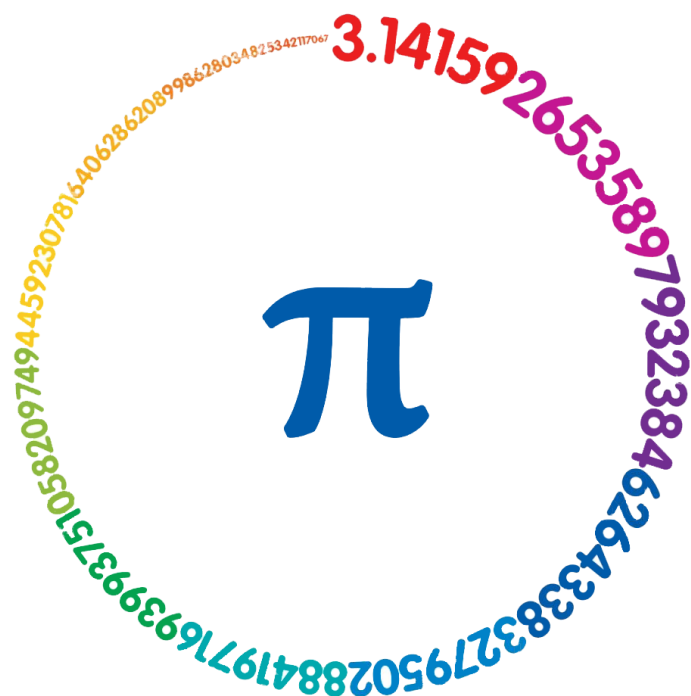


🌀

To`plamlar nazariyasi

🌀



TO`PLAM HAQIDA TUSHUNCHALAR

To`plam eng muhim matematik tushunchalardan biridir. Bu tushuncha matematika faniga to`plamlar nazariyasining asoschisi bo`lgan nemis matematigi Georg Kantor (1845-1918) tomonidan kiritilgan.

To`plam tushunchasi matematikaning boshlang`ich (ta`riflanmaydigan) tushunchalaridan biridir. U chekli yoki cheksiz ko`p obyektlar (narsalar, buyumlar, shaxslar va h.k.) ni birgalikda bir butun deb qarash natijasida vujudga keladi.

To`plamlar odatda lotin alifbosining bosh harflari bilan, uning elementlari esa shu alifboning kichik harflari bilan belgilanadi.

Masalan: $A = \{a, b, c, d\}$ yozuvi A to`plam a, b, c, d elementlardan tashkil topganligini bildiradi.

x element X to`plamga tegishli ekanligi  $x \in X$  ko`rinishda, tegishli emasligi esa $x \notin X$ ko`rinishda belgilanadi.

Masalan: barcha natural sonlar to`plami  $N$  va  $4, 5, \frac{3}{4}, \pi$  sonlari uchun  $4 \in N, 5 \in N, \frac{3}{4} \notin N, \pi \notin N$  munosabatlar o`rinli.

Elementlari soniga bog`liq holda to`plamlar chekli va cheksiz to`plamlarga ajratiladi. Elementlari soni chekli bo`lgan to`plam **chekli to`plam**, elementlari soni cheksiz bo`lgan to`plam **cheksiz to`plam** deyiladi.

Misol: $A = \{x | x \in N, x^2 > 7\}$ to`plam 2 dan katta bo`lgan barcha natural sonlardan tuzilgan, ya`ni  $A = \{3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$ . Bu to`plam – cheksiz to`plamdir.

Birorta ham elementga ega bo`lmagan to`plam **bo`sh to`plam** deyiladi. Bo`sh to`plam $\emptyset$ orqali belgilanadi. Bo`sh to`plam ham chekli to`plam hisoblanadi.

Misol: $x^2 + 3x + 2 = 0$ tenglamaning ildizlari $X = \{-2; -1\}$ chekli to`plamni tashkil etadi.  $x^2 + 3x + 3 = 0$  tenglama esa haqiqiy ildizlarga ega emas, ya`ni uning haqiqiy yechimlar to`plami $\emptyset$ dir.

Ayni bir xil elementlardan tuzilgan to`plamlar **teng to`plamlar** deyiladi.

Misol: $X = \{x | x \in N, x \leq 3\}$ va $Y = \{x | (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$ to`plamlar-ning har biri faqat 1, 2, 3 sonlaridan tuzilgan. Shuninguchun bu to`plamlar tengdir: $X = Y$

QISM TO`PLAM VA UNIVERSAL TO`PLAMLAR

Agar B to`plamning har bir elementi  $A$  to`plamning ham elementi bo`lsa,  $B$  to`plam A to`plamning **qism to`plami** deyiladi va $B \subset A$ ko`rinishida belgilanadi. Ta`rifga ko`ra, istalgan to`plam o`zining qism to`plami bo`ladi:  $A \subset A$  bo`sh to`plam esa, istalgan to`plamning qism to`plami bo`ladi $\emptyset \subset A$.

Qism to'plamlar ikki turga bo'linadi: **xos** va **xosmas** qism to'plamlar. To'plamning o'zi va bo'sh to'plam **xosmas qism to'plam** deyiladi. Ularda boshqa qism to'plamlar **xos qism to'plam** deyiladi.

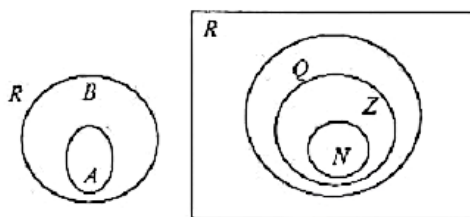
Masalan: $A = \{a, b, c\}$ to'plamning xos qism to'plamlari: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$; xosmas qism to'plamlari: $\{a, b, c\}$ va $\emptyset$ dir.

Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ to'plamlar A to'plamning qism to'plami bo'lsa, A to'plam $A_1, A_2, \dots, A_n$ to'plamlar uchun **universal to'plam** deyiladi.

Universal to'plam, odatda, J yoki U harfilari bilan belgilanadi. Masalan, N -barcha natural sonlar to'plami; Z -barcha butun sonlar to'plami; Q -barcha ratsional sonlar to'plami; R -barcha haqiqiy sonlar to'plami bo'lib, $N \subset Z \subset Q \subset R$ shartlar bajariladi va R qolgan sonli to'plamlar uchun universal to'plam vazifasini bajaradi.

TO'PLAMLAR USTIDA AMALLAR

To'plamlar orasidagi munosabatlarni yaqqolroq tasavvur qilish uchun Eyler–Venn diagrammasidan foydalaniladi. Bunda to'plamlar doira, oval yoki biror yopiq soha shaklida, universal to'plam esa, odatda, to'g'ri to'rtburchak shaklida tasvirlanadi.



TO'PLAMLARNING KESISHMASI

A va B to'plamlarning **kesishmasi** (yoki **ko'paytmasi**) deb, bu to'plamlarning ikkalasiga ham bir vaqtda tegishli bo'lgan elementlar to'plamiga aytiladi va $A \cap B$ ko'rinishid belgilanadi. To'plamlar kesishmasi belgilar yordamida $A \cap B = \{x | x \in A \text{ va } x \in B\}$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan:

1) $A = \{a | 4 \leq a \leq 14, a \in N\}$ va $B = \{b | 10 < b < 19, b \in N\}$ bo'lsa,

$A \cap B = \{x | 11 \leq x \leq 14, x \in N\}$ bo'ladi.

2) $X = \{a; b; c; d; e\}$ va $Y = \{d; e; f; k\}$ bo'lsa, $X \cap Y = \{d; e\}$ bo'ladi.

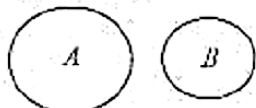
To'plamlar kesishmasi ularning umumiy qismidir. Umumiy qismga ega bo'lmagan to'plamlar kesishmasi bo'sh to'plamdir. Bu holda A va B to'plamlar **kesishmaydi** deyiladi va $A \cap B = \emptyset$ ko'rinishda yoziladi. Masalan, juft natural sonlar to'plami va toq natural sonlar to'plami umumiy elementga ega emas, ya'ni kesishmaydi.

Umumiy qismga ega bo'lgan to'plamlar kesishadi deyiladi va $A \cap B \neq \emptyset$, ya'ni A va B to'plamlar kesishmasi bo'sh emas, deb yoziladi. Masalan, 2 ga karrali natural sonlar va 5 ga karrali natural sonlar to'plamlari umumiy elementga ega, ya'ni kesishadi yoki kesishmasi bo'sh emas. Bu to'plamlar kesishmasi barcha 10 ga karrali natural sonlardan iborat bo'ladi.

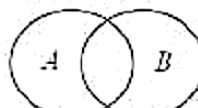
Ikki to'plamning o'zaro munosabatida to'rt hol bo'lishi mumkin.

1. To'plamlar kesishmaydi (**I**);
2. To'plamlar kesishadi (**II**);
3. To'plamning biri ikkinchisining qismi bo'ladi (**III**);
4. To'plamlar ustma-ust tushadi (**IV**);

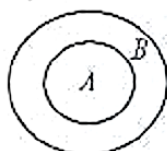
I. $A \cap B = \emptyset$



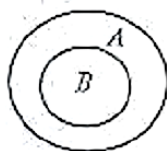
II. $A \cap B \neq \emptyset$



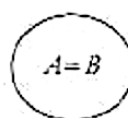
III. a) $A \subset B$



b) $B \subset A$

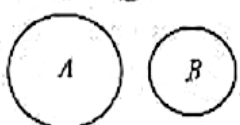


IV. $A = B$

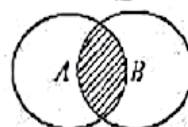


Quyida har bir hol uchun to'plamlar kesishmasi shtrixlab ko'rsatilgan.

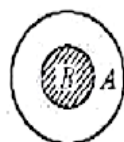
I. $A \cap B = \emptyset$



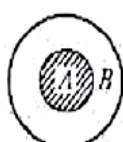
II. $A \cap B \neq \emptyset$



III. a) $A \cap B = B$



b) $A \cap B = A$



IV. $A \cap B = A = B$



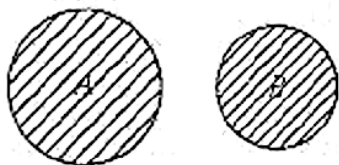
To'plamlar kesishmasi quyidagi xossalarga ega:

1. $B \subset A$ bo'lsa, $A \cap B = B$ bo'ladi.
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5. $A \cap \emptyset = \emptyset$
6. $A \cap A = A$

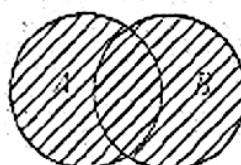
TO`PLAMLARNING BIRLASHMASI

A va B to`plamlarning **birlashmasi** (yoki **yig'indisi**) deb, bu to`plamlarning hech bo`lmaganda biriga tegishli elementlar to`plamiga aytiladi va $A \cup B$ ko`rinishda belgilanadi. To`plamlarning birlashmasi belgilar yordamida $A \cup B = \{x | x \in A \text{ va } x \in B\}$ ko`rinishda yoziladi.

I. $A \cup B$



II. $A \cup B$



III. $A \cup B$



IV. $A = B$



Masalan:

1) A - barcha juft sonlar to`plami, ya'ni  $A = \{a | a = 2n, n \in N\}$  va  $B$  - barcha toq sonlar to`plami, ya'ni $B = \{b | b = 2n - 1, n \in N\}$ bo`lsa, ularning birlashmasi  $A \cup B = N$  bo`ladi.

2) $X = \{m; n; p; k; l\}$ va $Y = \{p; r; s; n\}$ bo`lsa, ularning birlashmasi  $X \cup Y = \{m; n; p; k; l; r; s\}$  bo`ladi.

To`plamlar birlashmasining tasvirlari.

To`plamlar birlashmasi quyidagi xossalarga ega:

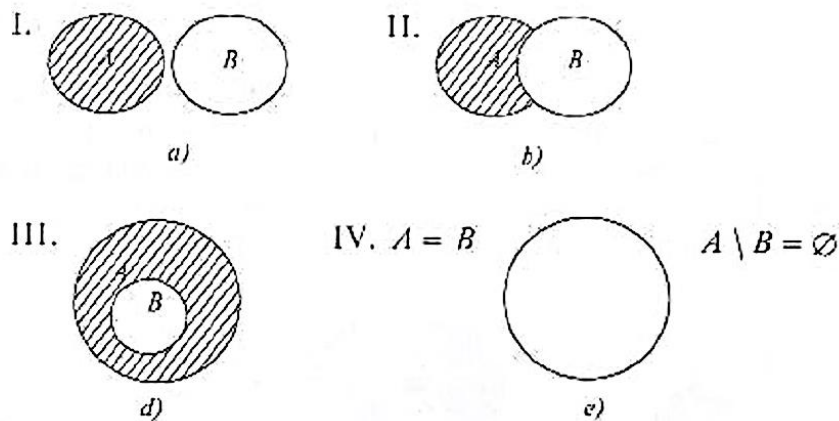
1. $B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $A \cup \emptyset = A$
6. $A \cup A = A$
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

TO`PLAMLAR AYIRMASI

A va B to`plamlarning **ayirmasi** deb,  $A$  ning  $B$  da mavjud bo`lmagan barcha elementlaridan tuzilgan to`plamga aytiladi.  $A$  va  $B$  to`plamlarning ayirmasi $A \setminus B$ ko`rinishda belgilanadi: $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ va } x \notin B\}$.

Masalan:

- 1) $A = \{a | |a| < 4, a \in \mathbb{R}\} = \{-4 < a < 4, a \in \mathbb{R}\}$, $B = \{b | |b| \leq 2, b \in \mathbb{R}\} = \{-2 \leq b \leq 2, b \in \mathbb{R}\}$ bo`lsa,  $A \setminus B = \{x | -4 < x < -2 \cup 2 < x < 4\}$  bo`ladi.
- 2) $X = \{a; b; c; d; e\}$, $Y = \{d; e; f; k; l\}$ bo`lsa,  $X \setminus Y = \{a; b; c\}$  va  $Y \setminus X = \{f; k; l\}$  bo`ladi.



To`plamlar ayirmasi quyidagi xossalarga ega:

1. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \setminus B = A$
2. $A = B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$
3. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus B \cap C$
4. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
5. $A \setminus \emptyset = A$
6. $\emptyset \setminus A = \emptyset$
7. $A \setminus A = \emptyset$

TO`PLAMLARNING DEKART KO`PAYTMASI

A va B to`plamlarning **dekart ko`paytmasi** deb, 1-elementi A to`plamdan, 2 – elementi  $B$  to`plamdan olingan $(a; b)$ ko`rinishdagi barcha tartiblangan juftliklar to`plamiga aytiladi. Dekart ko`paytma  $A \times B$  ko`rinishda belgilanadi: $A \times B = \{(a; b) | a \in A \text{ va } b \in B\}$.

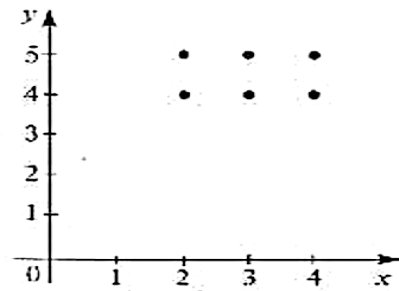
Masalan: $A = \{2; 3; 4; 5\}$, $B = \{a; b; c\}$ bo`lsa,  $A \times B = \{(2; a), (2; b), (2; c), (3; a), (3; b), (3; c), (4; a), (4; b), (4; c), (5; a), (5; b), (5; c)\}$  bo`ladi.

Sonli to'plamlar dekart ko'paytmasini koordinata tekisligida tasvirlash qulay.

Masalan: $A = \{2; 3; 4\}$, $B = \{4; 5\}$ bo'lsin, u holda

$A \times B = \{(2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5), (4; 4), (4; 5)\}$ bo'ladi.

Koordinata tekisligida shunday koordinatali nuqtalarni tasvirlaymizki, bunda A to'plam Ox o'qida va B to'plam Oy o'qida olinadi.



A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan va B to'plamning A to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan tuzilgan to'plamni A va B to'plamlarning **simmetrik ayirmasi** deb ataladi va $A \Delta B$ kabi belgilanadi, ya'ni $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Misol: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ bo'lsa, $A \Delta B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{8, 9, 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10\}$ bo'ladi.

X chekli to'plam elementlar sonini $n(X)$ orqali belgilaymiz. k ta elementli X to'plamni k **elementli to'plam** deb ataymiz.

Misol: X to'plam 10 dan kichik tub sonlar to'plami bo'lsin: $X = \{2, 3, 5, 7\}$. Demak, X to'plamda 4 ta elementdan tuzilgan ekan va u quyidagicha belgilanadi $n(X) = 4$.

BERILGAN TO'PLAMNING QISM TO'PLAMLARINI TOPPISH UCHUN QUYIDAGI FORMULADAN FOYDALANAMIZ

Agar to'plam elementlari $n(X) = m$ bo'lsa, u holda qism to'plamlar soni 2^m ko'rinishda bo'ladi.

Misol: $X = \{1, 2, 3\}$ to'plamning $n(X) = 3$ ta elementi bor. Qism to'plamlari soni $2^3 = 8$ bo'ladi va ular quyidagilardir:

$\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{1, 2, 3\}$ hamda $\emptyset$
 $\{1, 2\}$ $\{2, 3\}$
 $\{1, 3\}$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR

Berilgan A va B to'plamlarga ko'ra $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ to'plamlarni toping.

1. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{4, 8, 12, 16\}$.
2. $A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n-1, \dots\}$, $B = \{3, 6, 9, \dots, 3n, \dots\}$.
3. $A = \{x : (x-2)(x-3) = 0\}$, $B = \{x : (x-2)(x+4) = 0\}$.
4. $A = \{x : x^2 - 4 = 0\}$, $B = \{x : x - 2 = 0\}$.

Berilgan A va B to'plamlarga ko'ra $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$ to'plamlarni toping.

5. $A = \{x : 0 < x < 2\} = (0; 2)$, $B = \{x : 1 \leq x \leq 3\} = [1; 3]$.
6. $A = \{x : x(x-3) < 0\}$, $B = \{x : (x-3)(x-1) \geq 0\}$.
7. $A = \{x : x \in \mathbb{R}, x^2 - 8x + 15 \leq 0\}$, $B = \{x : x \in \mathbb{N}, x^2 - 6x < 0\}$.
8. $A = \{x : x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 4\}$, $B = \{x : x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 7\}$.

Berilgan A va B to'plamlarga ko'ra $A \times B$ Dekart ko'paytmani toping.

9. $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 4\}$.
10. $\{x | x \in \mathbb{N}, -5 \leq x < 5\}$ to'plamni nechta usul bilan ikkita kesishmaydigan qism to'plamlarga ajratish mumkin?
11. $M = \{36, 29, 15, 68, 27\}$, $P = \{4, 15, 27, 47, 36, 90\}$, $Q = \{90, 4, 47\}$ to'plamlar berilgan. $M \cap P$, $M \cap Q$, $P \cap Q$, $M \cap P \cap Q$ larni toping.
12. $A = \{2, 3, 4, 5, 7, 10\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$, $C = \{4, 9, 11\}$ bo'lsin. Quyidagi to'plamlarda nechtdan element mavjud:
a) $A \cup (B \cup C)$ b) $A \cap (C \cup B)$ c) $A \cap (B \cap C)$ d) $C \cup (A \cap B)$
13. $\{x | x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 23\}$ to'plamning nechta qism to'plamlari mavjud?
14. $A = \{x | -5 \leq x \leq 10\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N}, 3 \leq x \leq 15\}$ bo'lsa, $A \setminus B$ va $B \setminus A$ to'plam elementlarini toping.
15. $\{x | x \in \mathbb{N}, 6 \leq x^2 \leq 40\}$ to'plamning nechta qism to'plamlari mavjud?
16. A - 18 ning hamma natural bo'luvchilari to'plami, B - 24 ning hamma natural bo'luvchilari to'plami bo'lsa, $A \cap B$ to'plam elementlarini ko'rsating.
17. $\{x | x \in \mathbb{N}, 2 \leq x^2 \leq 44\}$ to'plamning nechta qism to'plamlari mavjud?
18. $P = \{a, b, c, d, e, f\}$, $E = \{a, g, z, e, k\}$ to'plamlar birlashmasini toping.
19. $\{x | x \in \mathbb{N}, -2 < x \leq 5\}$ to'plamning nechta qism to'plamlari mavjud?
20. $\{x | x \in \mathbb{N}, x^2 < 17\}$ to'plamning nechta qism to'plamlari mavjud?