Kombinatorikaning asosiy qoidalari. Takroriy bo’lmagan o’rinlashtirish va guruhlashlar

REJA

- **Kombinatorika tushunchasi**
- **Kombinatorikaning asosiy qoidalari**
- **O‘rinlashtirish**
- **Guruhlash**

Kombinatorika – diskret matematikaning bo‘limlaridan biri bo‘lib, ehtimollar nazariyasi, matematik mantiq, sonlar nazariyasi, hisoblash texnikasi va kibernetikada ko‘p qo‘llanilgani uchun muhim ahamiyatga ega bo‘ldi.

Insoniyat juda ko‘p marotaba ayrim predmetlarni barcha joylashtirish usullari sonini sanab chiqish yoki biror bir harakatni amalga oshirishdagi barcha mavjud usullar sonini aniqlash kabi masalalarga duch keladi.

Masalan: 50 kishini kassadagi navbatga necha xil usulda joylashtirish mumkin? Futbol bo‘yicha jahon chempionatida necha xil usulda oltin, kumush, bronza medallarni taqsimlash mumkin. Bunday tipdagi masalalar kombinator masalalar deyiladi.

Kombinator hisoblashlarda ko‘p qo‘llaniladigan juda **muhim qoidani** o‘rnataylik.

Kombinatorik masalalar bilan shug‘ullanadigan matematik fan ***kombinatorika*** deyiladi.

Kombinatorikani mustaqil fan sifatida birinchi bo‘lib olmon matematigi G.Leybnits o‘rgangan va 1666 yilda «Kombinatorika san’ati haqida» asarini chop etgan.

- Kombinatorikada qo‘shish va ko‘paytirish qoidasi dab ataluvchi ikkita asosiy qoida mavjud.
- ***Qo‘shish qoidasi*** : Agar biror α tanlovni $m(\alpha)$ usulda, β tanlovni esa $m(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo‘lsa va bu yerda α tanlovni ixtiyoriy tanlash usuli β tanlovni ixtiyoriy tanlash usulidan farq qilsa, u holda «α yoki β» tanlovni amalga oshirish usullari soni
  - $m(\alpha \text{ ёки } \beta) = m(\alpha) + m(\beta)$

- **Masala:** Korxonada 10 erkak va 8 ayol xodim ishlaydi. Shu korxonadan bitta xodimni necha xil usulda tanlab olish mumkin?
- **Yechish:** α - erkak xodimni tanlash, β - ayol xodimni tanlash bo‘lsin. Unda, shartga ko‘ra, $m(\alpha)=10$, $m(\beta)=8$ bo‘lgani uchun bitta xodimni
  - $m(\alpha \text{ yoki } \beta) = \boxed{m(\alpha) + m(\beta)} = \boxed{10+8 = 18}$
- usulda tanlash mumkin.

- ***Ko‘paytirish qoidasi:*** Agarda biror α tanlovni $m(\alpha)$ usulda, β tanlovni $m(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo‘lsa, u holda «α va β» tanlovni (yoki (α,β) juftlikni) amalga oshirish usullari soni

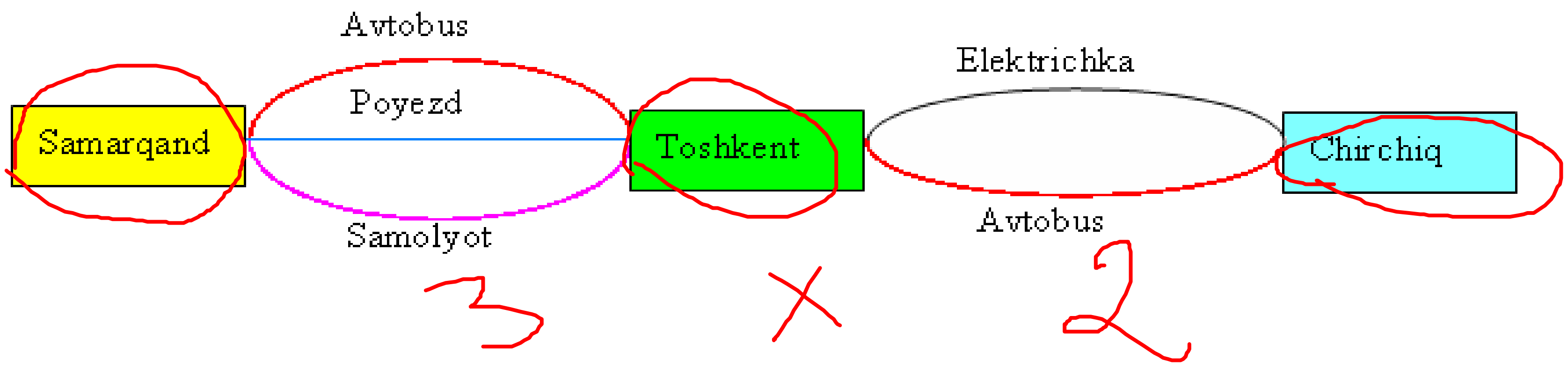
  - $m(\alpha \text{ va } \beta) = \boxed{m(\alpha) \cdot m(\beta)}$

- formula bilan topiladi.

- Masalan, qurilishda 10 suvoqchi va 8 buyoqchi ishlasa, ulardan bir suvoqchi va bir buyoqchidan iborat juftlikni $m(\alpha \text{ va } \beta)=10\cdot 8=80$ usulda tanlash mumkin.

1-masala. Samarqanddan Toshkentga samolyot, avtobus, poyezdda yetib borish mumkin; Toshkentdan Chirchiqqa esa avtobus yoki elektrichkada borish mumkin.

Samarqand - Toshkent – Chirchiq yo‘nalishi bo‘yicha necha xil usulda sayoxat uyushtirish mumkin.



Yechilishi: Tushunarliki Samarqanddan Chirchiqqacha borish usullari $3 \times 2 = 6$ ga teng, chunki Samarqanddan Toshkentgacha 3 xil borish usullariga, Toshkentdan Chiqchiqqacha 2 xil borish usullari mos keladi. Ushbu mulohazalar quyidagi **kombinatorikaning asosiy qoidasi** deb nomlanadigan sodda tasdiqni isbotlaydi.

Kombinatorikaning 1-qoidasi: *Agar qandaydir **A** tanlashni* ***m*** *usul bilan, bu usullarning har biriga biror bir boshqa* ***B*** *tanlashni* ***n*** *usulda amalga oshirish mumkin bo‘lsa, u holda **A va B** tanlashni (ko‘rsatilgan tartibda)* $m \times n$ *usulda amalga oshirish mumkin.*

2-masala. Futbol bo‘yicha mamlakat chempionatida 18 ta komanda qatnashadi. Necha xil usulda oltin va kumush medallar taqsimlanishi mumkin?

Yechilishi: Oltin medalni 18 ta komandadan biri egallashi mumkin. Oltin medal sohibi aniqlangandan keyin, kumush medalni qolgan 17 ta komandani biri egallashi mumkin. Demak oltin va kumush medallarni $18 \times 17 = 306$ xil usulda taqsimlash mumkin.

Endi kombinatorikaning asosiy qoidasini **(ko‘paytirish formulasini)** umumiy holda keltiramiz.

Aytaylik birin-ketin $\boldsymbol{k}$ *ta harakatni amalga oshirish talab qilngan bo‘lsin. Agar birinchi harakatni -* $\boldsymbol{n_1}$ *usulda, ikkinchi harakatni -* $\boldsymbol{n_2}$ *usulda, va hokazo* $\boldsymbol{k}$ *– harakatni -* $\boldsymbol{n_k}$ *usulda amalga oshirish mumkin bo‘lsa, u holda barcha* $\boldsymbol{k}$ *ta harakatni*

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$$

usulda amalga oshirish mumkin bo‘ladi.

Berilgan to‘plamning *k*-elementli to‘plam ostilari soni.

Agar A to‘plam berilgan bo‘lsa, u holda biz yangi to‘plam uning barcha to‘plam ostilar to‘plami M(A) ni ko‘rib chiqishimiz mumkin. M_k (A) – deb A to‘plamning baarcha *k* – elementli to‘plam ostilar to‘plamini belgilaymiz. Shunday qilib agar B $\subset$M(A) va N(B)=*k* bo‘lsa, B$\subset M_k$(A) bo‘ladi.

Misol. Aytaylik A={*a*, *b*, *c*, *d*,} to‘plam berilgan bo‘lsin. U holda barcha to‘plam ostilar quyidagicha

$$M(A)=\{\{\varnothing\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\},\{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b,d\}, \{c, d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,d,c\}, \{b,d,c\}, \{ a, b, c, d,\}\}.$$

Barcha masalan 2-elementli to‘plam ostilar to‘plami esa

$$M_2(A)=\{\{a,b\},\{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b,d\}, \{c, d\}\}$$

bo‘ladi.

N (M(A)) =$\boxed{2^4=16}$, N (M_2(A))=6 bo‘ladi.

Ushbu natijalarni ozgina tahlil qilaylik. 4 ta elementli to‘plamlardan 2 ta elementli to‘plam ostilar olish protsesida 1- element olishda 4 xil imkoniyatga egamiz, 2-elementni olishda endi 3 xil imkoniyatga ega bo‘lamiz. Natijada barcha 2 ta elementli 4*3=12 ta to‘plamga ega bo‘lamiz, lekin to‘plamlarda $\{a,b\}$ element bilan $\{b,a\}$ bitta element hisoblangani uchun va to‘plamda bitta element faqat bir marta yoziladi degan qoida borligi uchun bunday 2 taliklar soni 2 baravarga qisqaradi: $\frac{4*3}{2}=\frac{12}{2}=6$ ta turli xil 2 talik to‘plam ostilar mavjud ekanligi aniqlanadi. Qonuniyat chiqarishga harakat qilamiz:

$$\frac{4*3}{2}=\frac{4*3*2*1}{1*2*1*2}=\frac{4!}{2!*2!}=\frac{4!}{2!*(4-2)!}$$

Tabiiy savol tug‘iladi: n – elementli to‘plam nechta k – elementli to‘plam ostiga ega bo‘ladi ?

$\frac{4 \times 3}{2}$

a_1

Teorema. *n* – elementli to‘plamning barcha *k* – elementli to‘plam ostilar soni

$$N(M_k(A)) = \frac{n*(n-1)*(n-2)*.....*(n-(k-1))}{1*2*3*....*k} = \frac{n*(n-1)*....*(n-(k-1))*(n-k)*....*2*1}{1*2*3*...*k*(n-k)*....*2*1} =$$

$$\boxed{= \frac{n!}{k!*(n-k)!} = C_n^k}$$

teng bo‘ladi.

n – elementli to‘plamning ixtiyoriy *k* – elementli to‘plam ostilari ***n – elementdan k tadan guruhlash*** deb nomlanadi. Ayrim hollarda guruhlash so‘zini o‘rniga ***kombinatsiya n elementdan k tadan*** termini ham ishlatiladi.

Masala 1. Necha xil usulda 5 ta kitobdan 3 tadan qilib tanlab olish mumkin?

Masala 2. Necha xil usulda 7 odamdan 3 kishidan qilib komissiya tuzish mumkin?

Masala 3. Turnirda ***n*** ta shaxmatchi qatnashdi, agar ixtiyoriy 2 ta shaxmatchi o‘zaro faqat bir marta uchrashgan bo‘lsa, turnirda nichta partiya o‘yin o‘tqazilgan?

Masala 4. Qavariq ***n*** – burchak dioganallari nechta nuqtada kesishadi, agar ularning ixtiyoriy 3 tasi bir nuqtada kesishmasa.

Quyidagi tengliklar o‘rinli:

$$C_{n+m}^{n} = C_{n+m}^{m}$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Ularning to‘g‘riligiga kombinatsiyalarni faktoriallar orqali yozib chiqib ishonch hosil qilish mumkin.

Masala 5. Quyidagi ayniyatni isbotlang

$$C_{2n}^{n} = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2 .$$

Teorema. ***n*** elementli to'plamning barcha to'plam ostilar soni 2^n ga teng va quyidagi tenglik o'rinli

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^k .$$

Haqiqatdan ham C_n^k - ***n*** elementli to'plamning barcha ***k*** – elementli to'plam ostilari soni bo'lgani uchun, tushunarliki barcha to'plam ostilar soni esa

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$$

yig'indiga teng bo'lib ularning yig'indisi 2^n ga teng bo'ladi.

Berilgan to‘plamni o‘rinalmashtirish. To‘plamning har bir elementiga 1 dan ***n*** gacha sonlardan birortasi mos qo‘yilgan bo‘lib, turli elementlarga turli sonlar mos qo‘yilgan bo‘lsa, to‘plam ***tartiblashtirilgan*** deyiladi, bu erda *n* – to‘plamdagi elementlar soni. Agar masalan to‘plam elementlarini biror bir ro‘yxatda yozib, keyin har bir elementga ro‘yxatda turgan joy nomerini mos qo‘yilsa har qanday chekli to‘plamni tartiblashtirish mumkin. A to‘plamdan hosil qilingan tartiblashtirilgan to‘plamni $\vec{A}$ kabi belgilanadi. Tushunarliki bittadan ortiq elementi bor to‘plamni bir nechta usullar bilan tartiblashtirish mumkin. Tartiblashtirilgan to‘plamlar turli hisoblanadi agar ular yoki elementlari bilan farq qilsa, yoki ulatning tartibi bilan farq qilsa. Faqat elementlar tartibi bilan farq qiladigan turli tartiblashtirilgan turli to‘plamlar ushbu to‘plamninig ***o‘rin almashtirishi*** deyiladi.

Misol. Uchta elementdan iborat $\boxed{A=\{a,\ b,\ c\}}$ to‘plam o‘rin almashtirishlari quyidagicha bo‘ladi:

$$(a, b, c),\quad (a, c, b),\quad (b, a, c),$$
$$(b, c, a),\quad (c, a, b),\quad (c, b, a).$$

O‘rin almashtirishlar soni 6 ta bo‘ldi. Agar A to‘plam n ta elementdan iborat bo‘lsa, u holda ularning barcha o‘rin almashtirishlar sonini P_n kabi belgilaymiz.

Teorema. n ta elementdan iborat A to‘plam uchun

$$\boxed{P_n = n!}$$

bo‘ladi.

Masala 1. Tokchada 5 ta kitobni necha xil usulda joylashtirish mumkin.

$$P_5=1*2*3*4*5=5!=120$$

Masala 2. $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ 2n\}$ to‘plam elementlarini juft sonlari juft o‘rinlarda keladigan qilib necha xil usulda tartiblashtirish mumkin?

Juft sonlarni juft nomerli o‘rinlarda (bunday joylar n ta) $n!$ ta usulda qo‘yib chiqish mumkin, bu usullarning har biriga toq sonlarni toq nomerli o‘rinlarda $n!$ ta usulda qo‘yib chiqish mos keladi. Shuning uchun ham ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra barcha o‘rniga qo‘yishlar soni $n!*n! = (n!)^2$ ga teng bo‘ladi.

$5\times4\times3\times2\times1=120$

1 2 3 4 5

Masala 3. n ta elementdan berilgan ikkita elementi yonma-yon turmaydigan nechta o‘rin almashtirish yasash mumkin.

a va b elementlar berilgan bo‘lsin. Bu elementlar yonma-yon turgan o‘rin almashtirishlar sonini aniqlaymiz. Bunda birinchi hol a element b elementdan oldin kelishi mumkin, bunda a birinchi o‘rinda, ikkinchi o‘rinda, va hokazo $(n\text{-}1)$-o‘rinda turishi mumkin. Ikkinchi hol b element a elementdan oldin kelishi mumkin, bunday holatlar ham $(n\text{-}1)$ ta bo‘ladi. Shunday qilib a va b elementlar yonma-yon keladigan holatlar soni $2^*(n\text{-}1)$ ta bo‘ladi. Bu usullarning har biriga qolgan $(n\text{-}2)$ ta elementning $(n\text{-}2)!$ ta o‘rin almashtirishi mos keladi. Demak a va b elementlar yonma-yon keladigan barcha o‘rin almashtirishlar soni $2^*(n\text{-}1)^*(n\text{-}2)! = 2^*(n\text{-}1)!$ ta bo‘ladi. Shuning uchun ham izlanayotgan o‘rin almashtirishlar soni

$$n! - 2^*(n - 1)! = (n - 1)!^*(n - 2)$$

Berilgan to'plamning tartiblashtirilgan to'plam ostilari (joylashtirish)

Endi berilgan A to'plamning tartiblashtirilgan to'plam ostilarini ko'rib chiqamiz. A to'plamni o'zi tartiblashmagan hisoblaymiz, shuning uchun ham uning har bir to'plam ostisi biror bir usul orqali tartiblashtirish mumkin. A to'plamninig barcha k elementli to'plam ostilari C_n^k ta bo'ladi. Bu to'plamlarning har birini $k!$ ta usulda tartiblashtiriladi. Shunday qilib A to'plamning barcha tartiblashtirilgan k-elementli to'plam ostilari soni $k!*C_n^k$ ta bo'ladi.

Teorema. n ta elementdan iborat to‘plamning tartiblashtirilgan k – elementli to‘plam ostilari soni

$$A_n^k = k!*C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n*(n-1)*(n-2)*....*(n-(k-1))$$

ta bo‘ladi.

n elementli to‘plamning tartiblashtirilgan k-elementli to‘plam ostilari n ta elementdan k tadan ***joylashtirish*** deyiladi. Turli xil joylashtirishlar elementlar soni yoki ularning tartibi bilan farq qiladi. Shunday qilib n ta elementdan k tadan ***joylashtirishlar*** soni

$$A_n^k = n*(n-1)*(n-2)*....*(n-(k-1)).$$

ga teng bo‘ladi.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Masala 4. 5 ta talabani 10 ta joyga necha xil usulda joylashtirib chiqish mumkin? ~~Qidirilayotgan usullar soni 25 ta elementdan 4 tadan joylashtirishlar soniga teng.~~

$$A_{10}^{5} = \underset{1}{10} * \underset{2}{9} * \underset{3}{8} * \underset{4}{7} * \underset{5}{6} = 30240$$

Masala 5. Talaba 4 ta imtixonni 7 kun davomida topshirishi kerak. Buni necha xil usulda amalga oshirish mumkin?

$$A_{7}^{4} = \underset{1}{7} * \underset{2}{6} * \underset{3}{5} * \underset{4}{4} = 840$$

Agar oxirgi imtixon 7-kun topshirilishi aniq bo‘lsa, u holda usullar soni

$$4 * A_{6}^{3} = 4 * 6 * 5 * 4 = 480$$

Masala 6. Futbol chempionatida 16 ta komanda qatnashadi. Komandalarning oltin, kumush, bronza medallar va oxirgi ikkita o‘rinni egallaydigan variantlari nechta bo‘ladi?

$$A_{16}^{3} * A_{13}^{2} = 16*15*14*13*12 = \boxed{524160}$$

- **Masala:** Xodimga haftaning ixtiyoriy ikki kunini dam olish uchun tanlash imkoni berildi. Xodim dam olish kunlarini necha usulda tanlashi mumkin?
- **Yechish:** Hafta kunlarini n=7 elementli {1,2,3, … ,7 } to‘plam singari qarasak, dam olish kunlari {1,2}, {1,3}, {2,4},… kabi juftliklardan iborat bo‘ladi. Bunda $\{i,j\}$ va $\{j,i\}$ bitta variantni ifodalaydi. Demak, dam olish kunlarini tanlash n=7 elementdan k=2 tadan kombinatsiyalarni tashkil etadi va shu sababli ularning soni
- $$C_7^2 = \frac{7!}{2!\cdot(7-2)!} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7}{2} = 21`$$
- bo‘ladi.

Masala: Talaba 4 ta fan bo‘yicha qo‘shimcha tayyorlanish uchun ularning har biriga haftaning bir kunini ajratmoqchi bo‘ldi. Talaba hafta kunlarini fanlarga necha usulda taqsimlashi mumkin?

Yechish: Talabani I-IV fanlar uchun haftaning tanlagan kunlariini k=4 ta elementli $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ to‘plam, hafta kunlarini esa n=7 elementdan iborat $H=\{1,2,3, \dots ,7\}$ to‘plam singari qaraymiz. Bu holda $X\subset H$ bo‘lib, uni hosil etish n=7 ta elementdan k=4 tadan o‘rinlashtirishlarga mos keladi, chunki bunda elementlarning joylashish tartibi ham ahamiyatga ega. Masalan, {2,4,6,7} taqsimotda I fanga dushanba (2), II fanga chorshanba (4), III fanga juma (6) va IV fanga shanba(7) kunlari ajratilgan bo‘ladi. Unda {4,2,6,7}, {6,4,2,7} kabilar turlicha taqsimotlarni ifodalaydi. Demak, talaba fanlarga hafta kunlarini

$$A_7^4=\frac{7!}{(7-4)!}=\frac{7!}{3!}=4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=840`$$

usulda taqsimlashi mumkin.

Berilgan to‘plamning *k*-elementli to‘plam ostilari soni.

- Agar A to‘plam berilgan bo‘lsa, u holda biz yangi to‘plam uning barcha to‘plam ostilar to‘plami M(A) ni ko‘rib chiqishimiz mumkin. M*k* (A) – deb A to‘plamning barcha *k* – elementli to‘plam ostilar to‘plamini belgilaymiz. Shunday qilib agar $B \subset M(A)$ va $n(B)=k$ bo‘lsa, $B \subset M_k(A)$ bo‘ladi.

- Teorema. *n* – elementli to‘plamning barcha *k* – elementli to‘plam ostilar soni

$$N(M_k(A)) = \frac{n*(n-1)*(n-2)*.....*(n-(k-1))}{1*2*3*....*k} = \frac{n*(n-1)*....*(n-(k-1))*(n-k)*....*2*1}{1*2*3*...*k*(n-k)*....*2*1} =$$

$$= \frac{n!}{k!*(n-k)!} = C_n^k$$

- teng bo‘ladi.
- *n* – elementli to‘plamning ixtiyoriy *k* – elementli to‘plam ostilari ***n – elementdan k tadan guruhlash*** deb nomlanadi. Ayrim hollarda guruhlash so‘zini o‘rniga ***kombinatsiya n elementdan k tadan*** termini ham ishlatiladi.

- Ushbu koeffitsiyent uchun quyidagi xossalar o‘rinli

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

$$C_{n+m}^n = C_{n+m}^m$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^k$$

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$$

1.Kombinatorika elementlari

Kombinatorika (kombinatorik tahlil) — bu diskret matematikaning diskret to'plam elementlarini berilgan qoidalar asosida tanlash va joylashtirish bilan bog'liq bo'lgan masalalarni yechish usullarini o'rganuvchi bo'limidir.

Qandaydir predmetlardan (masalan, harflar, sharlar, kubchalar, sonlar va boshqalardan) tashkil topgan guruhlar **birikmalar yoki kombinatsiyalar** deb ataladi. Ana shu birikmalarni tashkil etgan predmetlar **elementlar** deyiladi.

Uch xil turdagi birikmalar mavjud: o'rin almashtirish (permutation), o'rinlashtirish va mosliklar (combination).

1 dan n gacha bo'lgan natural sonlar ko'paytmasi «n faktorial» deb ataladi va qisqacha $n!$ kabi yoziladi: $n!=1\cdot 2\cdot ...\cdot n$, $0!=1$. Ba'zan $n!$ ni hisoblashda quyidagi taqribiy Stirling formulasi qo'l keladi:

O'rin almashtirishlar

n ta elementli o'rin almashtirishlar deb bir-biridan faqat elementlarining tartibi bilan farq qiladigan n ta elementli birikmalarga aytiladi. Masalan, uchta A,B,C elementdan oltita o'rin almashtirish bajarish mumkin: ABC, ACB, BAC, CBA, BCA, CAB.

n ta elementli o'rin almashtirishlar soni P_n harfi bilan belgilanadi va quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$P_n = 1\cdot 2\cdot ...\cdot n = n!$$

1-misol. 1, 2, 3 raqamlardan ularning har biri tarkibida faqat bir marta uchraydigan nechta uch xonali son tuzish mumkin?

Yechish. Bunday uch xonali sonlarning soni $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ ta.

Javob: 6.

1.Kombinatorika elementlari

O‘rinlashtirishlar

n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar deb, har birida berilgan n ta elementdan m tasi olingan shunday birikmalarga aytiladiki, ularning har biri hech bo‘lmaganda bitta elementi bilan yoki faqat ularning joylashish tartibi bilan farq qiladi.

Masalan, uchta element A,B,C lardan ikkita elementli oltita o‘rinlashtirish mavjud: AB, AC, BC, BA, CA, CB.

n ta elementdan m tadan turli o‘rinlashtirishlar soni A_n^m bilan belgilanadi va quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)...(n-m+1), \quad (0 \le m \le n).$$

$$A_n^1 = n \quad va \quad A_n^0 = 1.$$

2-misol. Telefonda nomer terayotgan abonent ohirgi uch raqamni esidan chiqarib qo‘ydi va faqat bu raqamlar har hil ekanligini eslab qoldi. Bu holda abonent terishi mumkin bo‘lgan necha xil kombinasiya mavjud?

1.Kombinatorika elementlari

Guruhlashlar (Mosliklar)

n ta element orasidan m ta elementdan tuzilgan guruhlashlar (mosliklar) deb har birida berilgan n ta elementdan m tasi olingan shunday birikmalarga aytiladiki, ularning har biri hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farq qiladi. Masalan, uchta element A,B,C lardan ikkita elementli uchta moslik mavjud: AB, AC, BC.

n ta element orasidan m ta elementdan turli mosliklar soni C_n^m bilan belgilanadi va quyidagicha aniqlanadi:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \qquad (0 \le m \le n).$$

Xossalari:

1. $C_n^0 = C_0^0 = 1$
2. $C_n^1 = n$
3. $C_n^m = C_n^{n-m}$
4. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$
5. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ – rekurrent formula, bu yerda $0 \le m \le n$.

3-misol. Tijorat banki boshqarmasi bir xil lavozimlarga 10 ta nomzoddan 3 tasini tanlamoqda. Har bir nomzod bir xil imkoniyatga ega. 10 ta nomzoddan 3 kishidan iborat nechta guruh tuzish mumkin?

Yechish. Bu misolda $n=10$ *va* $m=3$. Turli guruhlar tarkibi, hech bo'lmaganda, bitta nomzodga farq qilishi kerak. Demak, bu birikmalar moslikdan iborat. Hammasi bo'lib

$$N = C_{10}^3 = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$$

Bajariluvchi va umumqiymatli formulalar.

Takrorlanishli o‘rin almashtirishlar

Aytaylik, n ta $A, B, \ldots, C$ elementlar mavjud bo‘lib, ularning ichida A element α marta, B element β marta va hakozo hamda C element γ marta takrorlansin va $n = \alpha + \beta + \ldots + \gamma$ bo‘lsin. U holda, takrorlanishli o‘rin almashtirishlar quyidagi formula yordamida topiladi:

$$P_{takr} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\gamma!}.$$

Masalan, aytaylik 4 element mavjud bo‘lib, ularning ikkitasi bir xil bo‘lsin: A, A, B, C. Ulardan mumkin bo‘lgan barcha o‘rin almashtirishlar quyidagicha:

$$\begin{array}{cccccc} AABC & ABAC & ACBA & BAAC & BCAA & CABA \\ AACB & ABCA & ACAB & BACA & CBAA & CAAB \end{array}$$

Yuqoridagi formula yordamida hisoblanganda ham

$$P_{takr} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} = \frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = 12$$

ni hosil qilamiz.

Takrorlanishli o'rinlashtirishlar

n ta elementdan m tadan takrorlanishli o'rinlashtirishlarda ($m \le n$) ixtiyoriy element 1 dan m martagacha uchrashi yoki umuman uchramasligi mumkin, ya'ni har bir n ta elementdan m tadan takrorlanishli o'rinlashtirish nafaqat turli elementlardan, balki t ta ixtiyoriy ravishda takrorlanuvchi ixtiyoriy elementlardan tashkil topgan hech bo'lmaganda elementlarining joylashish tartibi bilan farq qiluvchi guruhlarning har xil guruhi hisoblanadi.

Masalan, uchta A, B, C elementdan ikkitadan takrorlanishli o'rinlashtirishlar quyidagicha:

$$AA,\ BB,\ CC,\ AC,\ BC,\ CA,\ CB,\ BA,\ AB.$$

n ta elementdan m tadan takrorlanishli o'rinlashtirishlar soni $A_{n\ takr}^{m}$ bilan belgilanadi va quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$A_{n\ takr}^{m} = n^{m}.$$

5-misol. Seyfning shifrli kodi olti xonali sondan iborat. Kodlashtirganda nechta turli kombinatsiya tuzish mumkin?

Yechish. Bu misolda $n = 10$, chunki kodlashtirishda $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ raqamlarning hammasidan foydalanish mumkin va kod olti xonali son bo'lgani uchun $m = 6$. Demak, seyfni

$$A_{n\ takr}^{m} = n^{m} = 10^{6} = 1000000$$

usul bilan kodlashtirish mumkin.

Javob: 1000000.

Takrorlanishli guruhlashlar (Mosliklar)

n ta elementdan m tadan element bo'lgan takrorlanishli mosliklarda ixtiyoriy element 1 dan m martagacha uchrashi yoki umuman uchramasligi mumkin, ya'ni har bir n ta elementdan m tadan takrorlanishli o'rinlashtirish nafaqat turli elementlardan, balki m ta ixtiyoriy ravishda takrorlanuvchi ixtiyoriy elementlardan tashkil topishi mumkin. Tarkibi bir xil bo'lib, faqat elementlarining tartibi bilan farq qiluvchi guruhlar farq qilinmaydi, ya'ni faqat elementlarining joylashish tartibi bilangina farq qiluvchi guruhlar bir xil guruh hisoblanadi.

Masalan, uch A, B, C elementdan ikkitadan takrorlanishli mosliklar quyidagicha:

$$AA, BB,\ CC,\ AC,\ BC,\ AB.$$

n ta elementdan m tadan takrorlanishli mosliklar soni $C^m_{n\ takr}$ bilan belgilanadi va quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$C^m_{n\ takr} = C^m_{n+m-1} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Uyga vazifa

1. Shaxmat taxtasiga 8 ta ruxni bir-biriga hujum qilmaydigan qilib necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?

2. Ma'noga ega bo'lmaganlarini ham e'tiborga olgan holda a, i, t, r harflaridan 4 harfli nechta so'z tuzish mumkin?

3. 9 nafar kishining rais, rais o'rinbosari, kotib va ish yurituvchi vazifalariga tayinlanish imkoniyatlarini toping.

4. Turli 5 rangdagi bo'yoqlardan 3 xil rangli bo'yoq tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

5. Musobaqada 10 jamoa ishtirok etayotgan bo'lsa, ulardan uchtasining oltin, kumush va bronza medallarini olish imkoniyatlari sonini aniqlang.

6. Kutubxonada 6 tilning har biridan boshqalariga bevosita tarjima qilish uchun yetarli lug'atlar mavjud. Tillar soni 10 ta bo'lganda kutubxonaga yana qancha lug'at kerak?

7. Do'konda 10 xil qo'g'irchoq sotilayotgan bo'lsin. 8 dona turli qo'g'irchoqni sotib olish imkoniyatlari sonini aniqlang.

8. Barcha raqamlari turlicha bo'lgan 7 raqamli telefon nomerlari sonini toping.

9. Har bir yigit faqat bitta qizni o'yinga taklif qilish sharti bilan 4 nafar yigit 6 nafar qizlarni taklif etayotgan bo'lsa, bunday takliflar sonini toping.

10. Bir kishida 7ta, boshqa kishida esa 9ta kitob bor. Bu kishilar bir-birlari bilan ikkitadan kitob almashishmoqchi. Kitob almashishlar sonini aniqlang.

11. 28 dona domino donalarini 4 o'yinchiga teng taqsimlash imkoniyatlari sonini toping.