### Fazoda to’g’ri chiziq va tekislik tenglamalari.

#### Tekislik va uning tenglamalari

Fazoda ikki nuqta berilgan bo’lsin. Bu nuqtalardan bir xil masofada turgan nuqtalar to’plami (nuqtalarning geometrik o’rni) tekislik deb qaraladi.

####  Tekislikning normal tenglamasi

Tekislikning fazodagi o’rnini uning koordinatalar boshqacha bo’lgan masofasi **p**

ya’ni **O** nuqtadan unga o’tkazilgan OP perpendikulyarning uzunligi bilan, hamda **O** dan

tekislik tomon yo’nalgan birlik

*n*↼0

vektor bilan aniqlash mumkin. (1-chizma).

*npn*→0 *OM*  *p*

##### (1)

*np*→ *OM*  *r*↼*no*

*n*0 (2)

Buni (1) tenglikka qo’yamiz.

*r*↼*n*→*o*  *p*  0

(3)

bu tenglama tekislikning vektor shaklidagi normal tenglamasi deyiladi. **r** vektor tekislikdagi ixtiyoriy **M**

1-chizma

nuqtaning radus-vektori-o’zgaruvchi radus - vektor, *n o*

vektor esa birlik normal vektor deyiladi.

1. tenglamani proeksiyalar bilan yozamiz. … vektor bilan **Ox, Oy,Oz** koordinata o’qlari orasidagi burchaklarni mos tartibda  ,  ,  bilan, **M** nuqtaning koordinatalari

**m,x,y,z** bilan belgilaymiz ya’ni,

*no*cos, cos  , cos ,

*r**x*, *y*, *z*, bu holda

*rn* 0

 *x* cos  *y* cos   *z* cos

1. Bularni (3) tenglamaga qo’yamiz:

*x* cos 

*y* cos 

* *z* cos

 *p*  0

(5). Bu tenglama tekislikning koordinata

shaklidagi normal tenglamasi deyiladi.

1. tenglama x,y,z ga nisbatan birinchi darajali algebraik tenglamdir. Demak,har qanday tekislik x,y,z o’zgaruvchi koordinatalarga nisbatan birinchi darajali algebraik tenglama bilan tasvirlanadi.

#### Tekislikning umumiy tenglamasi

**Mo(xo,yo,zo)** nuqta **Q** tekislikka tegishl perpendikulyar bo’lgan nolmas vektor bo’lsin (2-chizma).

i nuqta, *n*  *A*; *B*;*C* esa **Q** tekislikka

Agar **M(x,y,z)** nuqta **Q** tekislikdagi

**Mo** nuqtadan farqli ixtiyoriy nuqta bo’lsa,

u holda *MM*0  *x*  *x*0 ; *y*  *y*0 ; *z*  *z*0  vektor

*n*  *r*  *r*0  *A*; *B*;*C* vektorga  bo’ladi,

ya’ni bu vektorning skalyar ko’paytmasi nolga teng bo’ladi:

*n*(*r*  *r*0 )  0 (6) tekislikning vektor

shaklidagi tenglamasini koordinata shaklidagi yozilsa , u holda

A(X-X0)+B(Y-Y0)+C(Z-Z0) (7) tenglama

hosil bo’ladi.

1. chizma

Mo(xo,yo,zo) nuqtadan o’tib tekislik tenglamasi deyiladi.

*n*  *Ai*  *Bj*  *Ck*

vektorga perpendikulyar bo’lgan

1. tenglamani bunday ko’rinishida ham yozish mumkin: Ax+By+Cz +D=0 (8)

bunda D= – (Axo+ Byo+Czo).

1. tenglamaga tekislikning umumiy tenglamasi deyiladi.

**Eslatma.** *n* vektor nolmas vektor bo’lgani uchun tekislik umumiy tenglamasining A,B va C koeffitsientlari bir vaqtda nolga teng bo’lmaydi.

(8) tekislikning umumiy tenglamasining xususiy hollalriga qarab chiqamiz:

1. D=0 bo’lsin, bu holda (8) tenglama Ax+By+Cz=0 (9) ko’rinishni oladi. Bu (9) tenglama koordinatalar boshidan o’tgan tekislikni tasvirlaydi.
2. A=0 bo’lsin, bu holda (8) tenglama By+Cz+D=0 ko’rinishni oladi. Bundan

cos

 0    

2

ya’ni koordinatalar boshidan tekislikka o’tkazilgan

perpendikulyar bilan absissalar o’qi orasidagi burchak 900 ga tengligidan Ox o’qiga parallel tekislikni tasvirlaydi. (3 - chizma)



1. B=0 bo’lsin, bu holda (8) tenglama Ax+Cz+D=0 (11) ko’rinishini oladi. Bu tenglama bilan tasvirlangan tekislik Oy o’qiga parallel bo’ladi. (4-chizma)
2. C=0 bo’lsin, Bu holda (8) tenglama Ax+By+D=0 (12) ko’rinishni oladi. Bu Oz o’qqa parallel tekislikni tasvirlaydi. (5-chizma)
3. A=0, D=0 bo’lsin. Bu holda (8) tenglama By+Cz=0 (13) ko’rinishni oladi. D=0 bo’lganda tekislik koordinatalar boshidan o’tadi. A=0 shartda Ox o’qiga parallel bo’ladi. Demak, (13) tenglama Ox o’qidan o’tgan tekislikni tasvirlaydi. (6-chizma)



1. B=0 va D=0 bo’lsin. Bu holda (8) tenglama Ax+Cz=0 (14) ko’rinishini oladi. Bu tenglama Oy o’qidan o’tgan (7-chizma) tekislikni tasvirlaydi.
2. C=0 va D=0 bo’lsin. Bu holda (8) tenglama Ax+By=0 (15) ko'rinishni oladi. Bu tenglama Oz o’qdan o’tgan tekislikni tasvirlaydi. (8-chizma)
3. A=0, B=0 bo’lsin. Bu holda (8) tenglama Cz+D=0 yoki

*Z*   *D* (*C*  0)

*C*

ko’rinishni oladi. Bu tenglama Ox o’qi bilan Oy o’qqa parallel tekislikni yoki, boshqacha aytganda, xOy tekislikka parallel tekislikni tasvirlaydi. Bu tekislik xOy

tekislikdan

*h*   *D*

*C*

(C  0) masofa uzoqdan o’tadi. (9- chizma)



1. B=0, C=0 bo’lsin. Bu holda (8) tenglama Ax+D=0 yoki

*x*   *D*

*A*

(A  0)

ko’rinishida bo’lib, yOz tekislikka parallel, undan tekislikni tasvirlaydi. (10-chizma)

*k*   *D*

*A*

masofa uzoqlikda yotgan

1. A=0, C=0 bo’lsin. Bu holda (8) tenglama By+D=0 yoki

ko’rinishni oladi va bu tenglama xOz tekislikka parallel bo’lib, undan uzoqlikda yotgan tekislikni tasvirlaydi. (11-chizma)

*y*   *D*

*B*

*l*   *D*

*B*

(B  0)

masofa

1. A=0, B=0, D=0 bo’lsin. Bu holda (8) tenglama Cz = 0 => z=0 (C  0) ko’rinishni oladi. 1 va 8 –hollardagi natijalarga asosan bu tenglama xOy tekislikni tasvirlaydi.

12. A=0, C=0, D=0 bo’lib, B  0

aylanadi va xOz tekislikni tasvirlaydi.

13. B=0, C=0, D=0 bo’lib, A  0

oladi va yOz tekislikni tasvirlaydi.

bo’lsa, (8) tenglama By=0=>y=0 tenglamaga

bo’lsa (8) tenglama Ax=0=>x=0 ko’rinishini

14. A=0, B=0, C=0 bo’lsa, (8) tenglamadan D=0 bo’lib,bu holda x,y,z o’zgaruvchilar orasida hech qanday munosabat (bog’lanish) bo’lmaydi.

####  Tekislikning har xil tenglamalari.

1. *x*  *y*  *z*  0

1. ko’rinishdagi tenglama, tekislikning koordina o’qlaridan

*a b c*

ajratgan kesmalarga nisbatan tenglamasi deyiladi (12-chizma)



12-chizma 13-chizma

1. Vektor shaklda berilgan

*n*1*r*

 *d*1  0

va *n*2*r*

 *d*2  0

tekisliklar orasidagi (13-

chizma) burchak:

cos 

*n*1  *n*2

1. formula bilan aniqlanadi; bu yerda

*n*  *A* ; *B* ;*C* ;

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| *n*1 |  | *n*2 |

*n*2  *A*2 ; *B*2 ;*C*2 

1 1 1 1

1. Umumiy ko’rinishda berilgan A1x+B1y+C1z+D1=0 va A2x+B2y+C2z+D2=0 tekisliklar orasidagi burchak (13-chizma):

cos  (18) formula bilan aniqlanadi.

*A*1  *A*2  *B*1  *B*2  *C*1  *C*2

*A*2  *B* 2  *C* 2  *A*2  *B* 2  *C* 2

1 1 1

2 2 2

1. *A*1 *A*2

 *B*1 *B*2

 *C*1

*C*2

(19) tekisliklarning parallellik, A1A2+B1B2+C1C2=0 (20)

perpendikulyarlik shartlari bo’ladi.

1. Ax+By+Cz+D=0 (8) tekislikning umumiy tenglamani normal shaklga keltirish

uchun uni hadma-had normallovchi ko’paytuvchi *M*  1

 *A*2  *B* 2  *C* 2

(21)ga

ko’paytirish kerak, bu holda

cos   *A*

; cos   *B* ;

cos   *C*

*A*2  *B* 2  *C* 2

 *A*2  *B* 2  *C* 2

*A*2  *B* 2  *C* 2

; *p*   *D*

bo’ladi. (22)

Agar D<0 bo’lsa, (21) va (22) formulalarning o’ng tomonida musbat, D>0 bo’lsa, manfiy ishora olinadi.

*A*2  *B* 2  *C* 2

1. M1(x1;y1;z1) nuqtadan xcos +ycos  +zcos  -p=0 (5) tekislikkacha bo’lgan **d**

masofa: d=|x1cos +y1cos  +z1cos  -p| (23); agar tekislikning tenglamasi vektor

shaklda bo’lsa, *d*  *n* 0*r*  *p* (24) ko’rinishda va agar tekislikning tenglamasi

*Ax*1  *By*1  *Cz*1  *D*

*A*2  *B* 2  *C* 2

Ax+By+Cz+D=(8) ko’rinishda bo’lsa, *d* 

aniqlanadi.

(25) formulalar bilan

1. M1(x1;y1;z1), M2(x2;y2;z2), M3(x3;y3;z3), nuqtalardan o’tuvchi tekislik tenglamasi:

a) Koordinatalar shaklida:

*x*  *x*1 *x*2  *x*1 *x*3  *x*1

*y*  *y*1 *y*2  *y*1 *y*3  *y*1

*z*  *z*1

*z*2  *z*1  0

*z*3  *z*1

(26)

1. Vektor ko’rinishida: (*r*  *r*1 )(*r*2  *r*1 ) (*r*3  *r*1 )  0

(27); bu yerda

*r*1 , *r*2

, *r*2

lar

mos ravishda M1, M2, M3 nuqtalarning radius-vektorlari.

1. M1(x1;y1;z1) nuqtadan o’tib, A1x+B1y+C1z+D1=0 tekislikka parallel bo’lgan tekislik tenglamasi: A1(x-x1)+ B1(y-y1)+ C1(z-z1)=0 (28)
2. M1(x1;y1;z1) va M2(x2;y2;z2) nuqtalardan o’tib, Ax+By+Cz+D=0 tekislikka perpendikulyar bo’lgan tekislik tenglamasi:

*x*  *x*1

*y*  *y*1

*z*  *z*1

*M M*

1

*M*1*M* 2

 *n* 

*x*2  *x*1 *A*

*y*2  *y*1 *B*

*z*2  *z*1  0

*C*

(29), ya’ni aralash ko’paytma nolga

teng. Bunda M (x;y;z) izlanayotgan tekislikning ixtiyoriy nuqtasi.

1. M1(x1;y1;z1) nuqtadan o’tib, A1x+B1y+C1z+D1=0 va A2x+B2y+C2z+D2=0 tekisliklarga perpendikulyar bo’lgan tekislik tenglamasi:

*n*1*n*2  *M* 1*M* 

*A*1 *A*2

*x*  *x*1

*B*1 *B*2

*y*  *y*1

*C*1

*C*2  0

*z*  *z*1

(30)

11. *n*  *A*, *B*, *C* vektorga  bo’lib, koordinatalar boshidan **p** birlik masofadan

o’tgan tekislik tenglamasi

*A*2  *B* 2  *C* 2

*Ax*  *By*  *Cz*

  *p*

(31)

12. A1x+B1y+C1z+D1=0 va A2+B2y+C2z+D2=0 tekisliklarning kesishish chizig’i orqali o’tuvchi tekisliklarning tenglamalari A1x+B1y+C1z+D1+  ( A2+B2y+C2z+D2)=0 (32).

Bu yerda  - o’zgaruvchi parametr (32) tenglama tekisliklar dastasining tenglamasi deyiladi.

## Mavzuga doir misollar

1-misol. a) 2x+5y+4z-20=0, b) 3x+2y-6=0 c) 3y+z-3=0

d) 5x-10=0, e) 2y-4=0 f) 4x+z=4 tekislik tenglamalarini yasang.

###### Yechilishi.

* 1. 2x+5y+4z-20=0 tenglamalarini tekislikning koordinata o’qlaridan ajratgan

kesmalarga nisbatan tenglamasi ko’rinishiga keltiramiz:

*x*  *y*  *z*  1

10 4 5



* 1. 3x+2y-6=0  *x*  *y*  1 tenglama (15-rasm) Oz o’qqa parallel tekislikdan iborat.

2 3

* 1. 3y+z-3=0  *y*  *z*  1 tenglama (16-rasm)Ox o’qqa parallel tekislik

1 3

* 1. 5x-10=0  x=2 (17-chizma) tekislik yOz tekislikka parallel, undan 2 masofa uzoqlikda yotgan tekislik tenglamasi.



* 1. 2y-4 =0  y=2 tekislik xOz tekislikka parallel, undan 2 masofa uzoqlikda yotgan (18-rasm) tekislik tenglamasi
	2. 4x+z=4  *y*  *z*  0 tenglama Oy o’qqa parallel (19-rasm) tekislik.

1 4

* 1. misol. Ox o’q hamda A(2;-1;3) nuqta orqali o’tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Bu masalani yechish uchun (13) formuladan foydalamiz. Ox o’q orqali o’tuvchi tekislik tenglamasi:

By+Cz=0(a). Bu tekislik A(2;-1;3) nuqta orqali o’tganligi uchun bu nuqtaning koordinatalari tekislik tenglamasini qanoatlantirishi kerak, ya’ni –B+3c=0  B=3c. Buni (a) tenglmaga qo’yib, c ga qisqartirsak, izlanayotgan tenglama hosil bo’ladi: 3y+z=0

* 1. misol. B (3;-2;-3) nuqta orqali o’tib, yOz tekislikka parallel bo’lgan tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish.yOz teikslikka parallel bo’lgan tekislik tenglamasi: Ax+D=0 (b). Bu tekislik B (3;-2;-3) nuqta orqali o’tganligi uchun,bu nuqtaning koordinatalari tekislik

tenglamasini qanoatlantirishi kerak, ya’ni: 3A+D D=-3A. Buni (b) tenglamaga qo’yib, A ga qisqartirsak, izlanayotgan tenglama hosil bo’ladi: Ax-3A=0 yoki x-3=0

* 1. misol. M(2;-2;1) nuqtadan o’tgan va 3x-4z+2=0 tekislikka parallel bo’lgan tekislik tenglamasni tuzing.

Yechish. (28) formuladan foydanalamiz: 3(x-2)-4(z-1)=0=>3x-4z-2=0

* 1. misol. A(4;-2;3) nuqtadan o’tib, 2x-y+4z-1=0 va x+2y-3z+4=0 teksliklarga perpendikulyar bo’lgan tekslik tenglamasini tuzing.

Yechish. (30) formulaga asosan [ *n*1 , *n*2 ]  *AM* =

2

1

*x*  4

1

2

*y*  2

4

 3

*z*  3

=0 

 4(z-3)+3(x-4)+4(y+2)-8(x-4)+(z-3)+6(y+2)=0 yoki x-2y-z-5=0

* 1. misol. M1(1;2;0), M2(-3;0;1), M3(1;-1;1) nuqtalardan o’tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish (26) formuladan foydalanamiz:

*x* 1

 3 1

1 1

*y*  2

0  2

1  2

*z*  0

1  0 =0 

1  0

*x* 1

  4

0

*y*  2

 2

 3

*z*

1 =0  -2(x-1)+12z+4(y-2)+3(x-1)=0  x+4y+12z-9=0

1

* 1. misol. M1(1;2;0), M2(2,1,1) nuqtalardan o’tib, -x+y-1=0 tekslikka perpendikulyar bo’lgan tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish (29) formulaga asosan :

*x* 1

2 1

1

*y*  2

1  2

1

*z*  0

1  0 =0  x+y-3=0

0

8-misol. a) 2x+4y+4z-2=0 va x-2y+2z-4=0

b) x-y-2z+5=0 va 2x-2y-4z+6=0 teksliklar orasidagi burchakni toping.

Yechish. (18) formuladan foydallansak:

1. cos 

 2  1    arccos 1

6  3 9 9

2 1 4  (2)  4  2

4 16 16  1 4  4

1. (19) formulaga asosan : 1 =

1 =  2

shartdan teksliklar parallel ekanligini ular

2

orasidagi burchak   0 bo’ladi.

 2 2

1. misol. M(4;3;-5) nuqtadan 2x-3y+6z-4=0 tekslikgacha bo’lgan masofa topilsin.

Yechish. Ma’lumki M0(x0,y0,z0) nuqtadan Ax+By+Cz+D=0 tekislikkacha bo’lgan

masofa *d*  formula bilan topiladi. Berilgan misolda A=2, B=-3,

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *A*  | *x*0 |  | *B*  *y*0  *C*  *z*0 |  | *D* |
|  | *A*2  *B*2  *C* 2 |

C=6, D=-4 bo’lganidan *d* 

  41  5 6

7 7

2  4  3 5  6  5  4

4  9  36

8  49

7

1. misol. M1(-1;0;0) va M2(0;0;1) nuqtalardan o’tib 2x+y-2z+2=0 tekslik bilan 600 burchak tashkil qiladigan tekslik tenglamasi tuzilsin.

Yechish. M1(-1;0;0) nuqtadan o’tuvchi tekslik tenglamasi: A(x+1)+By+Cz=0(\*). Bu tekslik M2(0;0;1) nuqtadan o’tsa, uning koordinatalari tekslik tenglamasini qanoatlantiradi.

A(0+1)+B.0+C.1=0 => C=-A(\*\*)

Berilgan tekslik bilan izlanayotgan tekslik orasidagi burchak 600 bo’lgani uchun cos =cos600= 1

2

Ikki tekislik orasidagi burchakni topish formulasi va (\*\*) ga ko’ra

 *A*  2  *B* 1 *C*  (2) 1

cos  





2 *A*  *B*  2 *A* 1

3 *A*2  *B*2  *C* 2



2



*C*   *A*

*A*2  *B*2  *C* 2

22 12  22 2  

 2(4A+B)=3

 2*A*2  32*AB*  5*B*2  0  *A*   1 (3

2

2*A*2  *B*2

3

 4)*B* (\*\*\*)

(\*) tenglamada A va C larning o’rniga (\*\*) va (\*\*\*) tengliklardagi qiymatlarini

3

qo’yib B ga qisqartirib soddalashtirsak:  (3 bo’ladi

-4)x+2By=0 tekslik tenglamalari hosil

1. misol. 4x+3y-5z-8=0 va 4x+3y-5z+12=0 teksliklar orasidagi masofani toping.

Yechish. Izlanayotgan masofani topish uchun teksliklarning birida nuqta olish va bu nuqtadan ikkinchi tekslikkacha bo’lgan masofani aniqlash kerak. Berilgan teksliklardan birinchisining tenglamasida y=0, z=0 deb faraz qilib, 4x-8=0=> x=2 ga ega bo’lamiz, ya’ni M(2;0;0) nuqtani hosil qilamiz. Bu nuqtadan 4x+3y-5z+12=0 tekislikkacha

bo’lgan masofa *d*     2

20

 5 2

4

2

2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 |  | 2 |  | 3 0  5  0 12 |
|  | 42  32  52 |

######  Fazoda to’g’ri chiziq tenglamalari.

**1 – §.** T**o’g’ri chiziqning vektor shaklidagi tenglamasi.**

Berilgan M 0 (x 0 ;y 0 ;z 0 ) nuqtadan *s* =(m;n;p) vektorga paralell holda o’tuvchi

to’g’ri chiziq tenglamasi

*r*  *r*0  *ts*

(1) ko’rinishda bo’ladi va to’g’ri chiziqning

vektor shaklidagi tenglamasi deyiladi. Bu yerda *r* -to’g’ri chiziqdagi istalgan M(x;y;z)

nuqtaning radius vektori (20-chizma) *r*0 esa M 0 (x 0 ;y 0 ; z 0 ) nuqtaning radius vektori, t-

harqanday haqiqiy qiymatlar qabul qiluvchi parametr. *s* - to’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi vektori deyiladi, uning koordinatalari esa (ya’ni m,n,p sonlar) to’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi koeffitsientlari deyiladi.



######  To’g’ri chiziqning parametrik va kanonik tenglamalari.

Agar (1) tenglamada vektorlarning koordinatalariga o’tilsa, ya’ni

*x*  *x*0  *tm*



*r*0 ={x0;y0;z0},

*r* ={x;y;z}, *s* ={m;n;p} larni e’tiborga olsak:

*y*  *y*0 *z*  *z*

* *tn*  (2) Bu tenglama to’g’ri
* *tp* 

0 

chiziqning koordinata shakldagi prametrik tenglamasi deyiladi. (t-parametr) (

2) tenglamalarga qaraganda biz fazoda to’g’ri chiziq parametrik shaklda uchta tenglama bilan beriladi degan xulosaga kelamiz.

Parametrik tenglamadan **t** ni topamiz:

*t*  *x*  *x*0 ,

*t*  *y*  *y*0 ,

*t*  *z*  *z*0

Demak ,

*x*  *x*0 = *y*  *y*0 = *z*  *z*0

(3)

*m n p m n p*

Bu tenglama to’g’ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

(3) tenglamalar fazodagi to’g’ri chiziq o’zgaruvchi x,y,z koordinatalarga nisbatan birinchi darajali 2 ta tenglama bilan berilishini ko’rsatadi.

(2) va (3) tenglamalar M 0 (x 0 ;y 0 ;z 0 ) nuqtadan o’tgan va yo’naltiruvchi vektori

*s* ={m;n;p} bo’lgan to’g’ri chiziqning tenglamasidir.

######  To’g’ri chiziqning umumiy va berilgan ikki nuqtadan o’tuvchi

**tenglamalari.**

Agar A1x+B1y+C1z+D1=0( ) va A2x+B2y+C2z+D2=0 (  ) teikslik tenglamalari o’zaro parallel bo’lmasa, u holda ular to’g’ri chiziq bo’ylab kesishadi. Shu sababli, fazoda to’g’ri chiziqni ikki tekislikning kesishish chiziq sifatida qaraymiz. Demak, fazoda to’g’ri chiziq quyidagi tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi:

*A*1*x*  *B*1 *y*  *C*1*z*  *D*1  0

(4)

*A x*  *B y*  *C z*  *D*  0

 2 2 2 2

1. ga to’g’ri chiziqning umumiy tenglamsi deyiladi.

Agar  va  tekislik tenglamalari o’zaro parallel bo’lsa (4) to’g’ri chiziqni ifodalamaydi.

Faraz qilaylik, to’g’ri chiziqning ikki M1(x1; y1; z1) va M2(x2; y2; z2) nuqtasi

berilgan bo’lsin. Bu to’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi vektori sifatida

*a*  *M*1*M* 2

vektorni

olish mumkin. Agar M(x;y;z) nuqta to’g’ri chiziqning siljuvchi nuqtasi bo’lsa bo’lsa, u

holda,

*M*1*M M*1*M*

va *a* vektorlar parallel bo’ladi. Berilgan koordinataga ko’ra,

={x-x1; y-y1; z-z1} , *a* ={x2-x1; y2-y1; z2-z1}

Vektorlarning kollenierlik shartiga ko’ra:

*x*  *x*1 

*x*2  *x*1

*y*  *y*1

*y*2  *y*1

 *z*  *z*1

*z*2  *z*1

(5)

1. ga berilgan ikki nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasi deyiladi.

######  To’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi kosinuslari.

To’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi vektori uchun birlik vektor olganda, ya’ni

*S*  *S*0

bo’lganda m, n,p koeffitsientlar to’g’ri chiziq bilan Ox,Oy, Oz o’qlar orasidagi  ,  ,  burchaklarning kosinuslariga teng bo’lsa, bu holda (2) parametrik va (3) kanonik tenglamalar mos tartibda

*x*  *x*0  *t* cos 





*y*  *y*0  *t* cos 

(2`) va

*x*  *x*0

cos

 *y*  *y*0

cos 

 *z*  *z*0

cos

(3`) ko’rinishlarni oladi.

*z*  *z*0  *t* cos 



cos , cos  , cos lar to’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi kosinuslari deyiladi.

Yo’naltiruvchi kosinuslarni yo’naltiruvchi koeffitsientlar bilan ifodalash mumkin.

Buning uchun

*S*  *SS*0

tenglikdan foydalanamiz, bunda s skalyar *S* vektorning

uzunligidir. Keyigni tenglikni proeksiyalar bilan yozsak, m=scos , n=scos  , p=scos (6)hosil bo’ladi; bu tengliklar to’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi koeffitsientlari bilan uning yo’naltiruvchi kosinuslarining bir-biriga proporsionalligini ko’rsatadi. *S*

vektorning uzunligi *S*  ekanini e’tiborga olib, (6) tenglikdan

*m*2  *n*2  *p*2

yo’naltiruvchi kosinuslarini topamiz:



*m*

cos 

 *s*





cos  *m*

 *s*



cos  *m*

 *s*

*m*



*m*2  *n*2  *p* 2

*n*



*m*2  *n*2  *p* 2

*p*



*m*2  *n*2  *p* 2

(7)

(7) formulalar yo’naltiruvchi vektorning uzunligi qanday bo’lmasin, fazodagi to’g’ri chiziqning yo’nalishi yo’naltiruvchi koeffitsientlar bilan aniqlanishini ko’rsatadi. Shuning uchun ko’p masalalarda fazodagi to’g’ri chiziqning yo’nalishi m:n:p nisbat shaklida beriladi. m,n,p, yo’naltiruvchi koeffitsentlarning hammasi bir vaqtda nolga teng bo’lolmaydi,chunki m=0, n=0, p=0 bo’lganda yo’naltiruvchi vektorning o’zi ham nol vektor bo’lib qoladi va bu holda to’g’ri chiziqning fazodagi o’rni aniq bo’lmaydi.

Ammo yo’naltiruvchi koeffitsientlarning ba’zi birlari nolga teng bo’lishi mumkin. Masalan m=0, n  0, p  0 bo’lsin. m=0 bo’lishi yo’naltiruvchi vektor Ox o'qqa perpendikulyar ekanini bildiradi. Bu holda (2) parametrik tenglamalar

*x*  *x*0  0  *t* ( *yoki x*  *x*0 )

 *y*  *y*  *n*  *t*



0

*z*  *z*  *p*  *t*

(2’’)

 0

ko’rinishga keladi; (3) tenglama esa

*x*  *x*0 *o*

 *y*  *y*0

*n*

 *z*  *z*0

*p*

(3``) shaklni oladi.

Nolga bo’lish mumkin emasligi bizga ma’lum, shuning uchun (3``) tenlamalarni qanday tushunish kerak? Bu savolga javob berish uchun (2``) tenglamalarni bunday yozamiz:

*x*  *x*0 *o*

 *y*  *y*0 ;

*n*

*y*  *y*0 *n*

 *z*  *z*0

*p*

Birinchi tenglamadan. n(x-x0)=O(y-y0) yoki x= x0

Demak, (3``) tenglamalar x= x0;

*y*  *y*0

*n*

 *z*  *z*0 tenglamalarga aylanadi. Bu

*p*

tenglamalar yo’naltiruvchi vektori *S* (o,n,p) bo’lgan to’g’ri chiziq tenglamasini tasvirlaydi. Demak, (3``) tenglamani shartli tenglama deb qarash kerak, u tenglama M1(x1,y1,z1) nuqtadan o’tib, *S* {o,n,p} yo’naltiruvchi vektorga parallel to’g’ri chiziqni tasvirlaydi.

###### Fazodagi ikki to’g’ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Fazodagi ikki to’g’ri chiziq orasidagi burchak sifatida fazoning istalgan nuqtasidan shu to’g’ri chiziqlarga parallel o’tkazilgan ikki to’g’ri chiziqning tashkil qilgan burchaklaridan istalganini olamiz. Bu burchak O bilan  o’rtasida o’zgaradi.

Ikki to’g’ri chiziqning kanonik tenglamalari berilgan bo’lsin:

*x*  *x*1  *y*  *y*1  *z*  *z*1 va *x*  *x*2  *y*  *y*2  *z*  *z*2

*m*1 *n*1 *p*1 *m*2 *n*2 *p*2

Bu chiziqlar orasidagi burchak bu to’g’ri chiziqlarning yo’naltiruvchi vektorlari *S* 1{m1 ; n1 ; p1} va *S* 2{m2 ; n2 ; p2} lar orasidagi burchak  ga teng. Ya’ni ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasiga ko’ra:

cos  (8)

*m*1  *m*2  *n*1  *n*2  *p*1  *p*2

*m*2  *n*2  *p* 2  *m*2  *n*2  *p* 2

1 1 1

2 2 2

Agar qaralayotgan to’g’ri chiziqlar bir-biriga parallel bo’lsa,ularning yo’naltiruvchi

*S* 1 , *S* 2 vektorlar ham parallel, ya’ni parallellik sharti deyiladi.

*m*1  *n*1  *p*1 *m*2 *n*2 *p*2

(9). Bunga ikki to’g’ri chiziqning

Agar berilgan to’g’ri chiziqlar bir-biriga perpendikulyar bo’lsa, u holda, ularning

*S* 1 , *S* 2 vektorlari ham bir-biriga perpendikulyar: m1m2+ n1n2+ p1p2=0 (10) bo’ladi.

(10) ga ikki to’g’ri chiziqning perpendikulyarlik sharti deyiladi.

######  Nuqtadan to’g’ri chiziqqacha bo’lgan va ikki to’g’ri chiziq orasidagi masofalar.

M1(x1; y1; z1;) nuqtadan

*x*  *x*0 *m*

 *y*  *y*0

*n*

 *z*  *z*0

*p*

to’g’ri chiziqqacha bo’lgan eng

qisqa masofani topish uchun bu nuqtadan to’g’ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyar bilan to’g’ri chiziq kesishish nuqtasining koordinatalarini topish kerak.

Buning uchun berilgan nuqta orqali berilgan to’g’ri chiziqqa perpendikulyar bo’lgan tekislik o’tkazib, berilgan to’g’ri chiziq bilan unga perpendikulyar bo’lgan tekislikning kesishish nuqtasining koordinatalarini aniqlaymiz.

Berilgan nuqta orqali o’tuvchi tekislik tenglamasi:

A(x-x1)+ B(y-y1)+ C(z-z1)=0 (\*)

A,B,C koeffitsentlar bilan bu tekislikka perpendikulyar bo’lgan to’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi vektorining koordinatalari orasida A:B:C=m:n:p munosabat mavjud. Bundan foydalansak, (\*)ning ko’rinishi quyidagicha bo’ladi:

m(x-x1)+ n(y-y1)+ p(z-z1)=0 Bu tekislik bilan berilgan to’g’ri chiziqning kesishish nuqtasining koordinatalari M2(x2; y2; z2;) aniqlanadi.

M1 va M2 nuqtalar orasidagi masofa berilgan M1 nuqtadan berilgan to’g’ri chiziqqacha bo’lgan eng qisqa masofadir.

1. misol A(7;9;7) nuqtadan

*x*  2  *y* 1  *z*

to’g’ri chiziqqacha bo’lgan masofani

toping.

4 3 2

Yechish. Berilgan nuqta orqali o’tuvchi tekislik tenglamasi:

A(x-7)+B(y-9)+C(z-7)=0 (\*)

A:B:C=4:3:2 munosabatni (\*)ga qo’ysak: 4(x-7)+3(x-9)+2(z-7)=0 yoki 4x+3y+2z- 69=0. Bu tekislik bilan berilgan to’g’ri chiziqning kesishish nuqtasining koordinatalarini aniqlaymiz.

Buning uchun berilgan to’g’ri chiziqning kanonik tenglamasini parametrik ko’rinishga keltiramiz, ya’ni x=4t+2, y=3t+1, z=2t (\*\*)

Bu qiymatlarni tekislik tenglamasiga qo’yib, parametr t ning qiymatini aniqlaymiz:

4(4t+2)+3(3t+1)+2.2t-69=0=> t=2

t ning bu qiymatini (\*\*)ga qo’yib, berilgan to’g’ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini aniqlaymiz: x=10, y=7, z=4 ya’ni B(10;7;4)

A va B nuqtalar orasidagi masofa berilgan A nuqtadan berilgan to’g’ri chiziqqacha bo’lgan eng qisqa masofadir, ya’ni d=|AB|=

22

Kesishmaydigan

*x*  *x*1 = *y*  *y*1 = *z*  *z*1

(11)

*x*  *x*2 = *y*  *y*2 = *z*  *z*2

1. to’g’ri

*m*1 *n*1 *p*1 *m*2 *n*2 *p*2

chiziqlar orasidagi eng qisqa masofani topish uchun bu to’g’ri chiziqlarning bir tekislikda yotishi yoki yotmasligini tekshirib ko’riladi.

Agar berilgan to’g’ri chiziqlar bir tekislikda yotmasa, izlanayotgan masofa mos ravishda (11)va (12) to’g’ri chiziqlar orqali o’tuvchi parallel tekisliklar orasidagi eng qisqa masofagan iborat bo’ladi.

Izlanayotgan masofa: **determinant yordamida:**

*d*  (13)

*n*

*x*2  *x*1 *m*1 *m*2

2

*y*2  *y*1 *n*1

*n*2

*z*2  *z*1 *p*1

*p*2

1

*p*

1



*p*

1

*m* 2

2

1



*m*

1

*n*

1

*n*2 *p*2

*p*2 *m*2 *m*2 *n*2

va **vektorial formada** esa,

*d*  (14) formulalar yordamida topiladi.

(*r*2  *r*1 )[*n*1*n*1 ]

[*n*1*n*1 ]

1. misol. Kesishmaydigan

*x*  9 = *y*  2 = *z* va

*x* = *y*  7 = *z*  2

to’g’ri chiziqlar

4

orasidagi eng qisqa masofani toping.

 3 1

 2 9 2

Yechish. Berilgan to’g’ri chiziqlarning bir tekislikka yotish yoki yotmasligini tekshirib ko’ramiz:

*x*2  *x*1 *m*1 *m*2

*y*2  *y*1 *n*1

*n*2

*z*2  *z*1

*p*1  0

*p*2

 9  5

 4  3

 2 9

2

1  245  0

2

Demak, berilgan to’g’ri chiziqlar bir tekislikda yotmaydi. 1-usul. (13) formuladan foydalansak:

*d*   245  7

 9

4

 2

 3

9

1

 5

 3

9

4 2

2

1

2

1 2

4

2 2 9 9





 3 2

9

35

2-usul. Agar

*r*1 veckor M1(9;-2;0) nuqtaning radius vektori, *r*2

esa

M2(0;7;2) nuqtaning radius vektori bo’lsa: *r*1 - *r*2 ={-9;-5;2}

*i*

So’ngra *n*1*n*2 = 4

 2

*j k*

 3 1 =-15 *i* -10 *j* +30 *k* => *n*1*n*2  =35,

9 2

(*r*2  *r*1 )*n*1*n*2    9;5;2 15;10;30 245

(14) formuladan: d= 245  7

35

###### TO’G’RI CHIZIQLAR VA TEKISLIK

######  To’g’ri chiziq va tekisliklar orasidagi burchak, ularning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Ta’rif. To’g’ri chiziq bilan uning tekislikdagi proeksiyasi tashkil qilgan burchakka to’g’ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak deb ataladi.

Bizga

*x*  *x*0 = *y*  *y*0 = *z*  *z*0

to’g’ri chiziq va Ax+By+Cz+D=0 tekislik berilgan

bo’lsin.

*m n p*



21-chizma

To’g’ri chiziq bilan tekislik orasidagi (21-rasm) burchak  va yo’naltiruvchi vektor *s* {m,n,p} bilan tekislikning normal vektori *n* {A;B;C} orasidagi burchak  lar

yig’indisi  + =  bundan  =

2

 -

2

Ikkinchi tomondan bu vektorlar mos tartibda OR to’g’ri chiziqqa va OP

perpendikulyarga parallel ( burchak O dan

 gacha o’zgaradi)

2

Ikki vektor orasidagi burchak kosinusini topish formulasiga ko’ra:

cos  sin  

(1) ( 0    

2

*Am*  *Bn*  *Cp*

*m*2  *n*2  *p*2 *A*2  *B*2  *C* 2

bo’lgani uchun formula

suratidagi ifodaning absolyut qiymati olinadi).

1. formulaga to’g’ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni topish formulasi deyiladi.

Agar to’g’ri chiziq bilan tekislik bir-biriga parallel bo’lsa, u holda to’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi vektori bilan tekislikning normal vektori bir-biriga perpendikulyar bo’ladi, ya’ni Am+Bn+Cp=0 (2)

Agar to’g’ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo’lsa, ularning yo’naltiruvchi vektori

bilan normal vektori bir-biriga parallel bo’ladi. Shuning uchun

*A*  *B*  *C*

(3)

*m n p*

1. ga to’g’ri chiziq bilan tekislikning parallellik shari deyilsa,(3)ga perpendikulyarlik sharti deyiladi.

######  Fazodagi to’g’ri chiziq va tekislikka doir ba’zi formulalar.

* 1. To’g’ri chiziqning umumiy tenglamasi :

 *A*1*x*  *B*1 *y*  *C*1*z*  *D*1  0

(4)

*A x*  *B y*  *C z*  *D*  0

 2 2 2 2

berilgan bo’lsin. Bu holda (4) to’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi vektori *s* ni har biri

berilgan to’g’ri chiziqqa perpendikulyar bo’lgan

*n*1 {A1; B1; C1) va

*n*2 {A2; B2; C2) ikki

vektorning vektor ko’paytmasidan hosil bo’lgan [ *n*1 *n*2 ] vektor deb qarashmumkin:

*i s*  [*n*1*n*2 ]  *A*1

*A*2

*j k*

*B*1 *C*1

*B*2 *C*2

(5)

* 1. Berilgan M1(x1; y1; z1) nuqtadan o’tib, berilgan

*x*  *x*0 = *y*  *y*0 = *z*  *z*0

to’g’ri

*m n p*

chiziqqa parallel bo’lgan to’g’ri chiziq

*x*  *x*1 = *y*  *y*1 = *z*  *z*1

1. formula bilan

aniqlanadi.

*m n p*

* 1. Berilgan M1(x1; y1; z1) nuqtadan o’tib , berilgan Ax+By+Cz+D=0 tekislikka

perpendikulyar bo’lgan to’g’ri chiziqning tenglamasi:

*x*  *x*1 = *y*  *y*1 = *z*  *z*1

*A B C*

* 1. Berilgan M1(x1; y1; z1) nuqtadan o’tib , Ax+By+Cz+D=0 tekislikka parallel bo’lgan hamma to’g’ri chiziqlar geometrik o’rni

A(x-x1)+B(y-y1)+C(z-z1)=0 (8) tekislikdan iborat bo’ladi.

* 1. Berilgan M1(x1; y1; z1) nuqtadan va berilgan

*x*  *x*0 = *y*  *y*0 = *z*  *z*0

to’g’ri chiziqdan o’tgan tekislik tenglamasi:

*m n p*

*x*  *x*1 *x*0  *x*1 *m*

*y*  *y*1 *y*0  *y*1 *n*

*z*  *z*1

*z*0  *z*1  0

*p*

(9)

6. *x*  *x*1 = *y*  *y*1 = *z*  *z*1 va *x*  *x*2 = *y*  *y*2 = *z*  *z*2

to’g’ri chiziqlarning bir tekislikda

*m*1 *n*1 *p*1 *m*2 *n*2 *p*2

|  |  |
| --- | --- |
| yotish sharti: |  |
| *x*2  *x*1 | *y*2  *y*1 | *z*2  *z*1 |
| *m*1 | *n*1 | *p*1  0 |
| *m*2 | *n*2 | *p*2 |

7. *x*  *x*0 = *y*  *y*0 = *z*  *z*0

to’g’ri chiziqning Ax+By+Cz+D=0 tekislikda yotish

sharti:

*m n p*

 *Am*  *Bn*  *Cp*  0

(11)

*Ax*  *By*  *Cz*  0



0

0 0

## FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. T.Jo’raеv va boshqalar “Oliy matеmatika asoslari” , 1-qism, T.1995 “O’zbеkiston”
2. Yo.Soatov “Oliy matеmatika” 1-jild, T.1992 “O’qituvchi”
3. V.Е.Shnеydеr “Oliy matеmatika qisqa kurs, 1-qism, T.1987 “O’qituvchi”
4. X.Latipov, Sh.Tojiеv “Analitik gеomеtriya va chiziqli algеbra”, T.1995 “O’zbеkiston”
5. T.Shodiеv “Analitik gеomеtriya va chiziqli algеbra”, T.1984 “O’qituvchi”
6. B.A.Abdalimov “Oliy matеmatika” T.1994 “O’qituvchi”